ѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРІИ

А. КИСЕЛЕВА.

(На построеніе).

Составилъ

студ. техн. В. И. Храбровицкій.

(Доказательства теоремъ, геометрическія мѣста и задачи на построеніе)

П. И. БОНАДУРЕРЪ,
влад. Южно-Русск. Книгоиздательства Ф. А. Юганс
КІЕВЪ—ПЕТРОГРАДЪ—ОДЕССА.
1915.

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРІИ

А. КИСЕЛЕВА.

(На построеніе).

Составилъ
студ. техн. В. И. Храбровицкій.

Доказательства теоремъ, геометрическія мѣста
чи на построеніе).

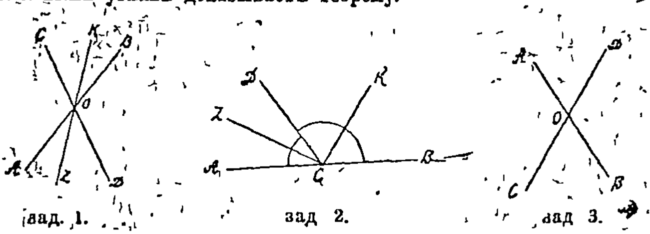


П. И. БОНАДУРЕРЪ,
влад. Южно-Русск. Книгоиздательства Ф. А. Іогансонъ.
КІЕВЪ—ПЕТРОГРАДЪ—ОДЕССА.
1915.

1. Пусть OK и OZ суть биссектрисы; требуется, что KOZ есть прямая линія. $\angle COB + \angle BOD = 2d$. какъ смежные, а $\angle KOC = \angle DOZ$, какъ половины вертикальныхъ угловъ, слѣд., вмѣсто $\angle COB$ можно вставить: $\angle COK + \angle KOB = \angle DOZ + KOB$, и равенство 1-е обратится въ: $\angle DOZ + \angle KOB + \angle BOD = 2d$, значитъ, на основаніи обратной теоремы о смежныхъ углахъ KO и OZ составляютъ прямую линію.

2. Пусть CK и CZ будутъ биссектрисами смежныхъ угловъ ACD и DCB; требуется доказать, что $ZCK = d$; уголъ ZCK составленъ изъ двухъ угловъ ZCD и DCK, которые = половинѣ смежныхъ угловъ, и въ совокупности составляютъ полусумму смежныхъ угловъ, т. е. $= \frac{2d}{2} = d$.

3. По условію $\angle AOD = \angle BOC$; $\angle AOD + \angle DBO = 2d$, какъ смежные, подставимъ въ это равенство, вмѣсто $\angle AOD = BOC$, получимъ $\angle BOC + \angle DOB = 2d$, что на основаніи обратной теоремы о смежныхъ углахъ доказываетъ теорему.



зад. 1. зад 2. зад 3.

4. По условію: $\angle AOC = \angle DOB$ (см. предыдущ. чертежъ) и $\angle AOD = \angle COB$; $\angle AOD + \angle DOB + \angle COB + \angle AOC = 2\angle AOD + 2\angle DOB = d$, какъ сумма угловъ вокругъ одной точки; слѣд., сокративъ послѣднее равенство на 2, получимъ: $\angle AOD + \angle DOB = d$, что на основаніи обратной теоремы о смежныхъ углахъ доказываетъ, что AO есть продолженіе OB.

5. 1) AM и AN суть медiаны; въ треуг. AMC и ANC ес[ть]
общая сторона AC, ∠ACM=∠CAN, какъ углы при основанiи ра[в-]
нобедреннаго треуг., стороны MC и NA равны, какъ половины ра[в-]
ныхъ боковыхъ сторонъ, итакъ, треугольники: AMC и ANC равн[ы],
слѣд. и AM=CN; 2) AK и CZ—биссектрисы: △AKC=△AZ[C]
(AC—общая, ∠ACK=∠CAZ, по упомянутому и ∠KAC=∠ZCA
какъ половины равныхъ угловъ), изъ равенства треуг-овъ слѣдуетъ
что AK=CZ; 3) AD и CE—высоты, △ADC=△AEC, какъ прямо-
угольные, имѣющiе общую гипотенузу и острый уголъ DCA=
=∠CAE; значитъ AD=CE.

6. DE⊥BC, MN⊥AB, AM=MB, BD=DC по условiю, MN=
=DE? △BDE=△BMN (катеты BD и BM равны, какъ половин[ы]
равныхъ боковыхъ сторонъ равнобедреннаго △-ка, ∠B—общi[й],
слѣд. DE=MN.

7. Согласно условiю AZ=AK, KM⊥AC и MZ⊥AB; требует-
ся доказать, что ∠CAM=∠BAM? △-ки AKM и AZM имѣютъ об-
щую гипотенузу AM и катетъ AK=AZ, значитъ △-ки равны
∠KAM=∠MAZ.

зад. 5 зад. 6 зад. 7.

8. По условiю ∠1=∠2 и KZ⊥AM; значитъ △-къ AKE=
=△AEZ, по общему катету AE и по равному острому углу, слѣд.
AK=AZ.

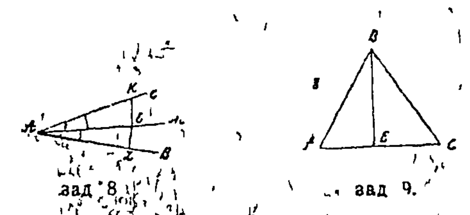
9. По условiю AE=EC, требуется доказать, что

$BE<\frac{AB+BC+CA}{2}$, изъ △-ка ABE имѣемъ: $BE<AB+AE$, и изъ

△-ка EBC, $BE<BC+CE$ складывая почленно эти два неравенства,
получимъ: $2BE<AB+AE+BC+CE$ или $2BE<AB+BC+AC$, от-
куда $BE<\frac{AB+BC+CA}{2}$.

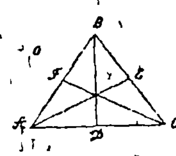
10. Четыреугольникъ ABCD есть параллелограмъ, такъ какъ
дiагонали AC и BD дѣлятся пополамъ въ точкѣ E(AE=EC по

условию и BE=ED по построению): изъ Δ-ка DBC имѣемъ $BD<BC+CD$ или $2BE<BC+AB$ (т. к. $CD=AB$, какъ противоположныя стороны парал-грама) откуда получимъ $BE<\frac{AB+BC}{2}$.



зад 8 зад 9 зад 10

10а. Согласно предыдущей теоремѣ $BD<\frac{AB+BC}{2}$, $AE<\frac{AB+AC}{2}$, $CF<\frac{CB+CA}{2}$; складывая эти три неравенства, получимъ: $AE+BD+CF<\frac{2AB+2BC+2AC}{2}$, откуда $AE+BD+CF<AB+BC+AC$; чтобы доказать вторую половину теоремы, мы разсмотримъ Δ-ки: ABD, BCF, AEC, изъ которыхъ имѣемъ: $BD>BC-CD$, $AE>AB-BE$, $CF>AC-AF$, складывая почленно, получимъ. $BD+AE+CF>BC-CD+AB-BE+AC-AF$; или $BD+AE+CF>AB+BC+AC-\frac{AB}{2}-\frac{BC}{2}-\frac{AC}{2}$, или: $BD+AE+CF>\frac{AB+BC+AC}{2}$.

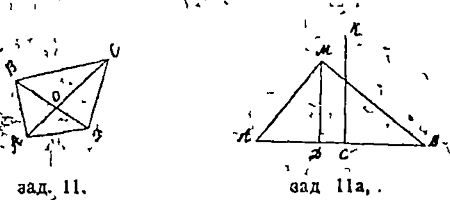


зад 10а зад 11

11. $AO+OB+OC<AB+BC+AC$? Зная что объемлемая ломаная меньше объемлющей, мы можемъ написать $AO+OC<AB+BC$, $AO+OB<AC+CB$, $OB+OC<AC+AB$, складывая почленно эти неравенства, получимъ: $2(AO+OB+OC)<2(AB+BC+AC)$, откуда имѣемъ: $AO+OB+OC<AB+BC+AC$; кромѣ того, надо доказать $AO+OB+OC>\frac{AB+BC+AC}{2}$, изъ Δ-овъ AOB, BOC и AOC

имѣемъ: $AO+OC>AC$, $AO+OB>AB$, $BO+OC>BC$; складывая почленно, получимъ: $2(AO+OC+OB)>AB+AC+BC$, сократить на 2, получимъ: $AO+OC+OB>\frac{AB+AC+BC}{2}$.

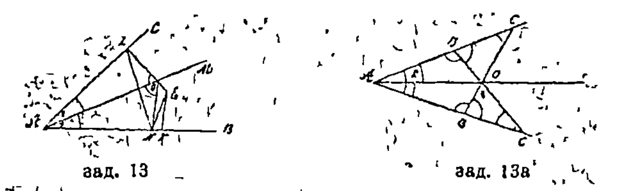
11a. $AC+BD<AB+BC+CD+DA$? Изъ $\triangle$-овъ ABD и BDC имѣемъ: $BD\angle AB+AD$, $BD\angle BC+CD$, складывая получимъ $2BD\angle AB+AD+BC+CD$; точно такъ же изъ $\triangle$-овъ ABC и ADC получимъ. $2AC\angle AB+BC+CD+DA$; складывая это неравенство съ прежнимъ, получимъ: $2BD+2AC\angle 2(AB+BC+CD+DA)$ откуда имѣемъ: $BD+AC\angle AB+BC+CD+DA$; кромѣ того, надо доказать, что $AC+BD>\frac{AB+BC+CD+DA}{2}$; изъ $\triangle$-овъ AOD, AOB, BOC, COD имѣемъ: $AO+OD>AD$, $AO+OB>AB$, $BO+OC>BC$, $CO+OD>DC$, складывая почленно получимъ: $2(AO+OB+OC+OD)>AD+AB+BC+DC$; откуда имѣемъ: $2(AC+BD)>AD+AB+BC+DC$, или $AC+BD>\frac{AD+AB+BC+DC}{2}$.



зад. 11. зад 11а.

12. Точка M не лежитъ на перпендикулярѣ къ срединѣ AB (этотъ перп—яръ есть линія KC), слѣдовательно. если черезъ точку M провести MD $\perp$ къ отрѣзку AB, то $AD<DB$ и наклонная MA; какъ менѣе удаленная отъ перпендикуляра MD, $<$ MB.

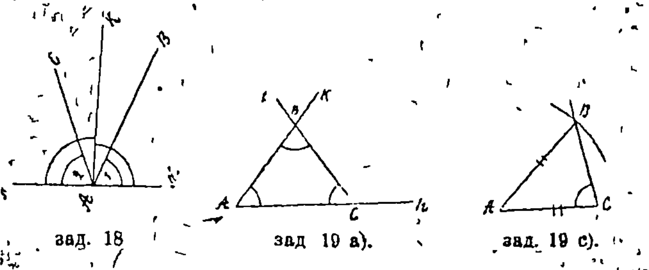
13. Задано точка E, лежащая внѣ биссекитрисы AM; $EK\perp AB$, $EZ\perp AC$; нужно доказать, что, $EZ>EK$; изъ пересѣченія ZE съ биссекитрисой, точки O, проводимъ перпендикуляръ ON къ AB; соединяемъ Z съ N и получаемъ $\triangle$-къ OZN равнобедренный, т. к. $OZ=ON$; MA будетъ служить $\perp$ къ срединѣ ZN; точка E не лежитъ на этомъ $\perp$ (доказательство, что биссектриса MA $\perp$ ZN въ срединѣ: $\triangle$-ки AOZ и AON равны по гипотенузѣ AO и $\angle 1=\angle 2$, слѣд $\angle ZOA=\angle NOA$ и линія MA есть биссектриса равнобедреннаго $\triangle$-ка ZON, слѣд. $MA\perp ZN$ въ срединѣ), значитъ на основаніи предыдущей теоремы $EZ>EN$, а такъ какъ $EN>EK$, какъ наклонная по отношенію къ $\perp$, то $EZ>EK$.



зад. 13 зад. 13a

13a. По условію $AB_1=AB$, $AC_1=AC$; вычтя первое равенство изъ второго, получимъ: $AC_1-AB_1=AC-AB$ или $B_1C_1=BC$; $\triangle AB_1C=\triangle AC_1B$ (общ. $\angle A$ и по двѣ равныя заключающія стороны); слѣд., $\angle C_1=C$; далѣе $\angle AB_1C=ABC_1$ (изъ равенства тѣхъ же $\triangle$-овъ AB_1C и AC_1B); $\angle CB_1C_1=\angle C_1BC$ какъ дополненія до $2d$ равныхъ угловъ; $\triangle OB_1C_1=\triangle OBC$ ($BC=B_1C_1$ и два прилежащихъ угла); слѣд., $OB=OB_1$ и $\triangle AOB=\triangle AOB_1$ (AO общая сторона, $AB=AB_1$ и $OB=OB_1$); слѣд., $\angle 1=\angle 2$ и линія AO, проведенная чрезъ пресѣчеіе BC_1 и B_1C, есть биссектриса $\angle A$.

18. По условію $\angle 1=\angle 2$; возставляемъ въ точкѣ $\perp$ къ NM; $\angle NAK=\angle MAK=d$, вычтя изъ второго первое равенство, получимъ: $\angle NAK-\angle 2=\angle MAK-\angle 1$, или $\angle CAK=\angle BAK$, т. е. KA есть биссектриса $\angle BAC$; теперь ясно построеніе: нужно провести биссектрису $\angle BAC$ и провести $NM\perp AK$, тогда $\angle 1=\angle 2$.



зад. 18 зад 19 a). зад. 19 c).

19. a) Даны: AC, AB и $\angle A$; построить $\triangle$; откладываемъ на произвольной прямой AH линію, равную AC и при точкѣ A строимъ $\angle=\angle A$, потомъ на линіи AK откладываемъ отрѣзокъ $=$ сторонѣ AB и точку B соединяемъ съ C, получимъ искомый $\triangle$; b) даны: сторона AC, $\angle\angle$ A и C, построить $\triangle$; откладываемъ на AH отрѣзокъ $=AC$, при точкахъ A и B строимъ данные $\angle\angle$ и въ пресѣченіи AK CZ получимъ третью величину B; c) Даны: AC, AB и $\angle C$ (т. к. $AB>AC$); откладываемъ AC строимъ $\angle C$ при

точкѣ C, проводимъ изъ точки A дугу радіусомъ, равнымъ большей сторонѣ AB и находимъ въ пресѣченіи точку.

Изслѣдованіе: I. Уголъ C—*тупой.* Такъ какъ дуга, проведенная изъ точки A радіусомъ, равнымъ AB пересѣчетъ линію BC и ея продолженіе въ двухъ точкахъ B и B_1, то получится два треугольника: ABC и ACB_1, изъ которыхъ второй не соотвѣтствуетъ условію ($\angle ACB_1$—острый); въ этомъ случаѣ—одно рѣшеніе.

II. Уголъ C—*острый.* Въ этомъ случаѣ, какъ легко убѣдиться изъ чертежа, имѣемъ опять таки одно рѣшеніе, т.-к. $\triangle ACB_1$ не соотвѣтствуетъ условію ($\angle ACB_1$—тупой).

III. Уголъ C прямой; въ этомъ случаѣ имѣемъ два рѣшенія, т. к. $\triangle$-ки ABC и AB_1C удовлетворяютъ одновременно условію ($\angle\angle ACB$ и ACB_1 каждый въ отдѣльности$=d$).

изслѣд. I   изслѣд. II   изслѣд III

20. a) Откладываемъ отрѣзокъ, равный основанію AC, затѣмъ изъ точки радіусомъ, равнымъ боковой сторонѣ дѣлаемъ дужку, изъ точки C тѣмъ же радіусомъ проводимъ дугу, и въ пресѣченіи дугъ находимъ вершину B.

b) Откладываемъ сначала отрѣзокъ равный основанію AC, затѣмъ при точкахъ A и C строимъ $\angle\angle$, равные заданному по условію и въ пресѣченіи двухъ линій AB и CB находимъ вершину B.

c) Здѣсь приходится строить треугольникъ по двумъ сторонамъ и углу между ними

d) Здѣсь приходится строить по двумъ сторонамъ и углу противъ одной изъ нихъ, что уже извѣстно.

21. a) Такъ какъ $\angle$ между катетами $=d$, то задача сводится къ построенію $\triangle$-ка по двумъ сторонамъ и углу между ними.

b) Уголъ $\angle d$ между катетами извѣстенъ; слѣд. задача сводится къ построенію $\triangle$-ка по двумъ сторонамъ и углу противъ большей изъ нихъ, см № 19; здѣсь два рѣшенія.

Т. к. $\angle d$ извѣстенъ, то задача сводится къ построенію Δ-ка по сторонѣ и двумъ прилежащимъ $\angle\angle$.

22. a) Биссектриса BD дѣлитъ равнобедр. Δ на 2 равныхъ прямоугольныхъ Δ-ка: ABD и DBC, зная высоту BD и боковую сторону AB легко построить на основаніи № 21 в) ΔABD и потомъ изъ точки B радіусомъ, равнымъ BC пересѣчь основаніе AC.

b) ΔABD легко построить на основаніи № 21 c), т. к. $\angle 1 = \frac{\angle B}{2}$ извѣстенъ, кромѣ того $\angle ADB = d$ и BD дана.

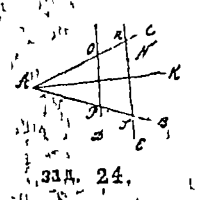
c) $\angle AKC$ ($AK \perp BC$) легко построить на основаніи № 21 b), т. к. AC и AK даются по условію; далѣе, чтобы получить искомый ΔABC, надо продолжить CK до пересѣченія съ BD, перпендикуляромъ къ срединѣ AC, и на пересѣченіи найдемъ точку B, которую соединимъ съ A.

зад 22.

зад. 23

23. Проводимъ безконечную линію AH, при точкѣ A строимъ $\angle CAB$, равный данному, затѣмъ на сторонѣ этого угла AB откладываемъ отрѣзокъ, равный гипотенузѣ и изъ конца его B опускаемъ $BC \perp AH$, получимъ Δ ABC искомый.

24. Черезъ точку M (внѣ угла BAC) или черезъ точку N (внутри $\angle$ BAC) проведены линіи MD или NE такъ, что AO=AP и AR=AS; $\Delta\Delta$ AOP и ARS равнобедренны такимъ образомъ; проведемъ AK биссектриссу $\angle$ BAC; она $\perp$ OP и $\perp$ RS (по свойству биссектр. ровнобедрен. Δ-ка), отсюда вытекаетъ построеніе линій MD и NE, проводимъ биссектрису $\angle$ BAC, это будетъ AK; затѣмъ черезъ точки M и N проводимъ MD $\perp$ AK и NE $\perp$ AK, тогда AO=AP и AR=AS.

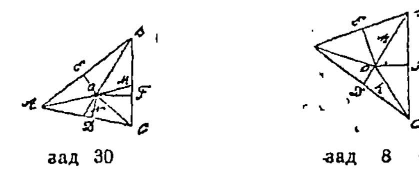


зад. 24.

зад 27.

27. Для нахожденія искомой точки соединимъ A и B, середины отрѣзка AB возставимъ ⊥ CM до пересѣченія съ прям KZ (данной); точка M будетъ искомая, такъ какъ она лежитъ прямой KZ и на ⊥ къ срединѣ AB; точно такое же построе будетъ и тогда, когда точки A и B находятся по обѣ стороны ніи KZ.

30. Геометрическимъ мѣстомъ точекъ, равноудаленныхъ о сторонъ AC и AB, будетъ биссектриса ∠CAB, т. е. линія A точно такъ же говоримъ, что искомая точка должна лежать биссектрисѣ ∠ABC, т. е. линіи BN; искомая точка, находясь од временно на AM и BN, будетъ лежать въ пересѣченіи ихъ: будетъ точка O, теперь докажемъ, что точка O будетъ также рав удалена отъ сторонъ CB и CA ∠BCA, для доказательства опусти изъ точки O перпендикуляры на всѣ стороны: OE OF, OD и д кажемъ что OD=OF, извѣстно, что OD=OE и OE OF, отсю ясно, что OD=OF.



зад 30 зад 8

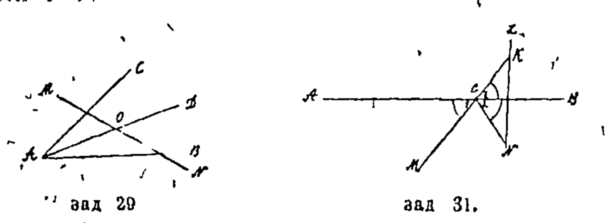
28 Геометрическимъ мѣстомъ точекъ, равноудаленныхъ от двухъ точекъ A и C будетъ DM ⊥ AC въ срединѣ стороны AC на лин. DM должна находиться искомая точка; кромѣ того, он должна находиться на равномъ разстояніи отъ точекъ A и B; слѣд она должна лежать на EK ⊥ AB въ ея срединѣ E; значитъ, ис комая точка, находясь одновременно на DM и EK, будетъ лежат въ ихъ пересѣченіи, это будетъ точка O; она будетъ равноудаленн отъ точекъ A, B и C.

29. Искомая точка будетъ находиться на пересѣченіи биссек трисы ∠BAC, т. е. линіи AD съ данной линіей MN; это будетъ точка o, т. к. по свойству биссектрисы она находится на ровномъ разстояніи отъ сторонъ ∠BAC.

30. Рѣшеніе см раньше послѣ № 27.

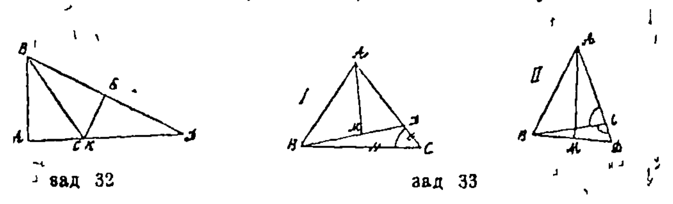
31. Положимъ, искомая точка C найдена; опустимъ изъ точки N (данной по условію) NZ ⊥ AB и продолжимъ MC до пересѣче

нія въ точкѣ K, тогда по свойству точки C $\angle 1 = \angle 2$, и $\angle 1 = \angle 3$ по свойству вертикальныхъ угловъ; отсюда $\angle 3 = \angle 2$ и $\triangle$-ки CKD и CDN (прямоугольные) будутъ равны (общій катетъ CD и равные острые углы: $\angle 3 = \angle 2$), отсюда слѣдуетъ, что KD=DN; теперь построеніе ясно: надо изъ точки N опустить NZ $\perp$ AB, отложить DK=DN и точка K соединить прямой линіей съ данной другой точкой M; на пресѣченіи KM съ AB будетъ лежать искомая точка C и: если мы теперь соединимъ C съ N, то $\angle 1 = \angle 2$



зад 29   зад 31.

32. Строимъ сначала прямоугольный $\triangle$ ABD, одинъ катетъ котораго = данному катету AB, а другой AD=суммѣ гипотенузы и катета искомаго $\triangle$-ка; затѣмъ изъ точки E, средины гипотенузы BD построеннаго $\triangle$-ка ABD проводимъ EK $\perp$ BD, и въ пересѣченіи съ AD находимъ точку C; ABC будетъ искомый $\triangle$-къ, такъ какъ BC=CD, и AC+BC=AC+CD=заданной суммѣ.



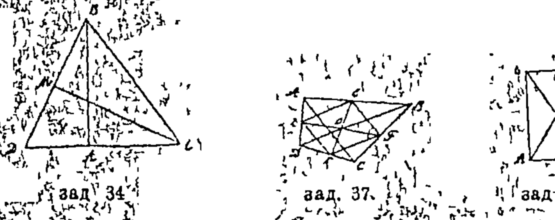
зад 32   зад 33

33. I. AC>AB, отсюда: $\angle B > \angle C$; дано: основаніе BC, разность AC—AB=DC и $\angle C$ меньшій чѣмъ $\angle B$; для построенія отъ точки C откладываемъ на сторонѣ AC (бо́льшей) отрѣзокъ DC, равный разности боковыхъ сторонъ; т. е. опредѣляется $\triangle$ BDC (по двумъ сторонамъ и углу C между ними); построивъ $\triangle$ BDC по даннымъ изъ условія, мы изъ точки M, средины стороны BD, проводимъ MA $\perp$ BD и въ пересѣченіи этого перпендикуляра съ продолженіемъ DC находимъ точку A, которую соединимъ съ B и получимъ искомый $\triangle$ ABC (по свойству MA $\perp$ къ серединѣ BD AB=AD и AC—AB=DC удовлетворяетъ условію).

II. AB>AC и ∠C>∠B, для построенія продолжимъ ... внизъ и отложимъ AB—AC=CD = данной разности; тогда опредѣлится △ BCD (въ немъ извѣстно: основаніе BC, ∠BCD=180—∠C и CD=данной разности=AB—AC); построивъ △ BCD, изъ точки M середины стороны BD, проводимъ MA ⊥ BD и въ пересѣченіи съ продолженіемъ CD находимъ точку A, которую соединимъ съ B и получимъ искомый △ ABC (по свойству MA ⊥ B въ ея срединѣ AB=AD и AB — AC=DC=данной разности).

34. Сначала строимъ прямоугольный △ DBA, одинъ катетъ котораго AB=данному, а AD=разности между гипотенузой и катетомъ искомаго △-ка, чтобы отъ △-ка ABD перейти къ искомому мы въ серединѣ M проводимъ MC ⊥ BD и на пересѣченіи съ продолженіемъ катета DA находимъ искомую точку C; △ ABC удовлетворяютъ условію. AB=данному катету; кромѣ того BC—AC=данной разности DA, потому что по свойству MC (перпендик. къ срединѣ BD) BC=CD, а DC—AC=AD, слѣд. BC—AC=AD.

37. Пусть E середина AB, F—середина BC и т. д.; проведемъ діагональ BD; разсмотримъ △-ки ABD и BCD; линія EZ и KF, соединяющія середины боковыхъ сторонъ въ этихъ △-ахъ (считая BD за общее основаніе этихъ △-овъ) будутъ ∥ основанію и равны его половинѣ, слѣд. линіи EZ ∥ KF, а потому и EF ∥ ZK и фигура EF KZ есть параллелограмъ.



зад. 34 зад. 37 зад. 38

38. Данъ прямоугольный △ABC и его медіана CD; слѣд. BD=DA; продолжимъ CD и отложимъ DE=DC; соединивъ E, B, A, получимъ прямоугольникъ EBCA, (такъ какъ діагонали EC и BA дѣлятся пополамъ и ∠C=d); отсюда слѣдуетъ, что EC=AB и $\frac{EC}{2}=\frac{AB}{2}$, т. е. $DC=\frac{AB}{2}$.

39. Данъ △ ABC, въ которомъ медіана $DC=\frac{AB}{2}=AD$; продолжимъ DC и отложимъ DE=DC, соединимъ теперь E съ B и A.

получимъ ▭ AEBC, который есть прямоугольникъ, т. к. діагонали его EC и AB равны (изъ условія имѣемъ: $2DC=EC=2\frac{AB}{2}=AB$) и дѣлится пополамъ въ точкѣ D; слѣд. $\angle C=d$.

40. $CD \perp AB$ и $AE=BE$; $\angle DCE=\angle A-\angle B$. Замѣтимъ, что $\angle A=\angle BCD$, какъ углы съ перпендикулярными сторонами ($AC \perp BC$ и $CD \perp AB$); кромѣ того, $\angle B=DCA$ по той же причинѣ ($BC \perp AC$ и $DC \perp BA$); на основаніи № 38 $\triangle BCE$—равнобедренный и, слѣдов., $\angle B=\angle BCE$, отсюда вытекаетъ, что $\angle DCE=\angle DCB-BCE$ или (т. к. $\angle BCE=\angle B=\angle DCA$) $\angle DCE=\angle DCB-\angle DCA$, или (т. к. $\angle DCB$ по доказанному $=\angle A$) $\angle DCE=\angle A-\angle B$.

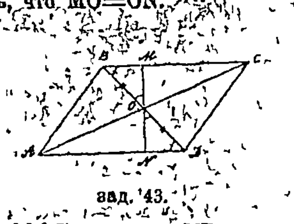
зад 39. зад 40. зад 41.

41. Данъ прямоугольный $\triangle ABC$, въ которомъ $\angle B={}^1/_3 d$; требуется доказать, что $AC=\frac{AB}{2}$; для доказательства продолжимъ AC и отложимъ $CD=AC$, соединимъ D съ B, получимъ $\triangle CBD=ABC$ (общій катетъ BC и катетъ $CD=AC$), слѣд. $\angle ABC=\angle CBD={}^1/_3 d$ и $\angle ABD={}^1/_3 d+{}^1/_3 d={}^2/_3 d$, кромѣ того, вслѣдствіе равенства: $AB=BD$, $\triangle ABD$ равнобедренный, и $\angle A=\angle D=(2d-{}^2/_3 d):2={}^2/_3 d$, отсюда слѣдуетъ, что $\triangle ABD$ имѣетъ всѣ углы равные ${}^2/_3 d$, т. е. что онъ равноугольный и равносторонній; значитъ, $AD=BD=AB$, и $\frac{AD}{2}=AC=\frac{AB}{2}$.

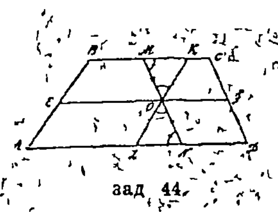
42. Изъ предыдущаго чертежа видно, что если $AC=\frac{AB}{2}$, то $\angle ABC={}^1/_3 d$; въ самомъ дѣлѣ, продолживъ AC и отложивъ $CD=AC$, получимъ $\triangle ABC=\triangle BCD$ (см. № 41) и $BD=2AC=AD=AB$, т. е. $\triangle ABD$—равносторонній или равноугольный, а потому $\angle A=\angle ABD=\angle D=2d:3={}^2/_3 d$, и $\angle ABC={}^2/_3 d:2={}^1/_3 d$.

43. ABCD есть параллелограмъ; линія MN проходитъ черезъ центръ параллелограма; требуется доказать, что $MO=ON$; для до

свидетельства заметимъ, что $\triangle BOM = \triangle NOD$ (BO=OD, какъ половинки діагонали BD, $\angle MOB = \angle NOD$, какъ вертикальные, $\triangle MBO = \angle NDO$, какъ внутренніе, накрестъ-лежащіе); отсюда слѣдуетъ, что MO=ON.



зад. 43.

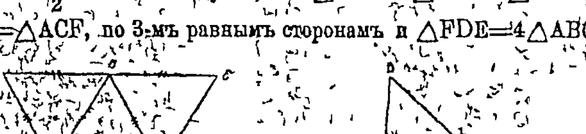


зад. 44.

44. Дана линія KZ; требуется доказать, что KO=OZ; черезъ точку O проводимъ MN || CD; тогда $\triangle MOK = \triangle ZON$ (т. к. MO=CE=FD=ON, какъ паралелльн. между паралелльными, $\angle MOK = \triangle ZON$, какъ вертикальные, и, кромѣ того, $\angle KMO = \angle ONZ$, какъ внутренніе, накрестъ лежащіе); отсюда слѣдуетъ, что KO=OZ.

45. Сумма внѣшнихъ угловъ всякаго многоугольника равна 4d; если мы допустимъ, что многоугольникъ можетъ имѣть болѣе 3-хъ острыхъ угловъ, т. е., напримѣръ, 4 острыхъ угла, то сумма соотвѣтствующихъ имъ внѣшнихъ угловъ будетъ равна 4 тупымъ угламъ или болѣе 4d, что противно теоремѣ о внѣшнихъ углахъ многоугольника.

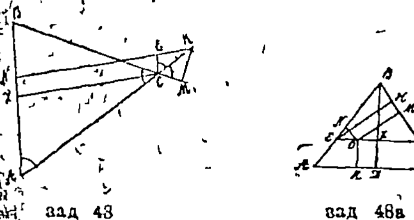
46. DE || AC, FE || AB и DF || BC; требуется доказать что $\triangle FDE = 4\triangle ABC$ и что $AC = \frac{DE}{2}$, $AB = \frac{FE}{2}$, $BC = \frac{DF}{2}$; AC=DB=BE, какъ паралелльныя между паралелльными; слѣд. $AC = \frac{DE}{2}$; кромѣ того, по той же причинѣ $AB = EC = FC = \frac{FE}{2}$ и $BC = AD = AF = \frac{DF}{2}$; отсюда слѣдуетъ, что $\triangle ADB = \triangle ABC = \triangle BFC = \triangle ABC = \triangle ACF$, по 3-мъ равнымъ сторонамъ и $\triangle FDE = 4\triangle ABC$.



зад 46 зад 47

47. KM ⊥ BC и KN ⊥ AB; требуется доказать, что KM+KN=AZ; проведемъ KE ⊥ AZ; тогда KM=EZ (KM ∥ EZ, какъ перпендикуляры къ BC; кромѣ того, KE ∥ ZM, какъ перпендикуляры къ параллельн. прямымъ KM и AZ), какъ параллельныя между параллельными; кромѣ того, изъ разсмотрѣнія △-овъ AEK и ANK, которые равны, (общая гипотенуза AK, ∠AKE=∠ACB, какъ соотвѣтственные, и, слѣд., равные острые углы: ∠AKE=∠ACB=∠CAB) получаемъ: KN=AE, слѣд., AZ=AE+EZ=KN+KM.

48. KM ⊥ BC, KN ⊥ AB; требуется доказать, что между KM, KN и CZ (которое ⊥ AB) существуетъ какая нибудь аналогичная предыдущей, изложенной въ № 47, зависимость; проведемъ CE ⊥ KN; тогда, (см. № 47) CZ=EN; а изъ разсмотрѣнія △-овъ ECK и CKM общая гипотенуза CK, кромѣ того, ∠MCK=∠ACB=∠BAC=∠ECK), которые равны, находимъ KM=KE, отсюда слѣдуетъ, что CZ=EN=KN—KE=KN—KM.



зад 48 зад 48а

48а. Взята внутри равносторонняго △-ка ABC точка O, проведены OK ⊥ AC, ON ⊥ AB, OM ⊥ BC; требуется доказать, что OK+ON+OM=BD (высотѣ △-ка ABC); для доказательства чрезъ точку O проводимъ EF ∥ AC; тогда OK=ZD (какъ параллельн. между параллельными); кромѣ того, получается △EBF—равносторонній, т. к. по равенству *): соотвѣтственныхъ и равныхъ этотъ △ есть равноугольный и равносторонній; къ этому △-ку, какъ имѣющему EB=BF примѣняется теорема № 47 и поэтому ON+OM=EH; а т. к. EH по свойству равносторонняго △-ка = BZ, то ON+OM=BZ, и ON+OM+OK=BZ+OK=BZ+ZD=BD.

49. По условію: AB=BC=CD=DA и $AA_1=BB_1=CC_1=DD_1$; отсюда путемъ вычитанія этихъ равенствъ получимъ $AB—AA_1=BC—BB_1=$ **) слѣд., $\triangle A_1BB_1=\triangle B_1CC_1=\triangle C_1DD_1=\triangle D_1AA_1$ (имѣютъ они равные катеты); отсюда слѣдуетъ равенство гипоте-

*) ∠BEF=∠BAC=∠BCA=∠BFE=∠FBE

**) $=CD-CC_1=DA-DD_1=A_1B=B_1C=C_1D=D_1A$

нуэъ: $A_1B_1=B_1C_1=C_1D_1=D_1A_1$; кромѣ того, $\angle AA_1D=\angle BB$ т. д., и $\angle AD_1A_1=BA_1B_1$, и т. д. $\angle AA_1D_1+\angle BA_1B_1=d$ (кк. сумма ост. угловъ прямоугольнаго $\triangle$-ка), и $\angle D_1A$ $\angle A_1B_1C_1=\angle B_1C_1D_1=\angle C_1D_1A_1=2d-$ $=d$; значитъ, фигура $A_1B_1C_1D_1$, имѣю равныя стороны и углы прямые, есть рать.

49а. Для доказательства обращаемся къ чертежу № 37; 1) параллелограмъ EFKZ есть прямоугольникъ, то $EF\perp FK$, и $AC\parallel EF$, то $AC\perp FK$, а т. к. $FK\parallel BD$, то $AC\perp BD$, т. е. д нали даннаго четыреугольника ABCD должны быть перпенд лярны;

2) если EFKZ есть ромбъ, то $ZE=EF$; отсюда слѣду что $EZ=\frac{BD}{2}=EF=\frac{AC}{2}$ и $BD=AC$, т. е. діагонали даннаго тыреугольника должны быть равны.

3) Т. к. квадратъ соединяетъ въ себѣ свойства прямоуго ка и ромба, то въ случаѣ, если EFKZ есть квадратъ, то діагон AC и BD должны быть равны и перпендикулярны.

50. Искомое геометрическое мѣсто будетъ линія RS, прох щая черезъ E, середину линіи MN, и параллельная линіи AB; ція RS будетъ дѣлить всѣ линіи, исх щія изъ точки M, MO, MP, MQ попо въ точкахъ F, K, Z: въ этомъ можно диться слѣдующимъ образомъ: провод черезъ точку F $ab\parallel MN$ и черезъ т M линію $Ma\parallel AB$; теперь $\triangle MFa=\triangle$ ($Fb=EN=EM=aF$, $\angle bFO=\angle MFa$, какъ вертикальные, и $\angle Ma$ $=\angle FbO$, какъ внутренніе накрестъ-лежащіе); отсюда слѣдуетъ, $MF=FO$, т. е. что линія RS дѣлитъ MO пополамъ въ точк точно такъ же можно доказать, что $MK=KP$, $MZ=ZQ$ и т. д.

51. Найти геометрическое мѣсто точекъ, равноотстоящихъ двухъ параллельныхъ прямыхъ.

Пусть СД и EF будутъ двѣ параллельныя линіи. Иско мѣсто будетъ линія AB, параллельная этимъ прямымъ и прове черезъ средину M общаго перпендикуляра NP.

Въ самомъ дѣлѣ, всякая точка на линіи AB находится въ одинаковомъ разстояніи отъ параллельныхъ линій, и всякая точка внѣ AB не одинаково отстоитъ отъ тѣхъ же прямыхъ.

зад. 51.

зад 52

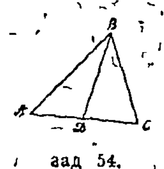
52. Найти геометрическое мѣсто вершинъ треугольниковъ, имѣющихъ общее основаніе и равныя высоты.

Геометрическое мѣсто вершинъ приходится на прямой AA', проведенной черезъ вершину A треугольника ABC параллельно его основанію BC, *ибо очевидно, что у всѣхъ треугольниковъ* ABC, A'BC... общее основаніе BC и одна и та же высота AD.

53. Даны два угла треугольника, *построить третій.*

На прямой AB при точкѣ C строимъ уголъ DCB, равный суммѣ двухъ данныхъ угловъ (см. рѣш. зад. №14), тогда дополнительный уголъ до 2d, т. е. $\angle DCA$ и будетъ искомый.

зад. 53.



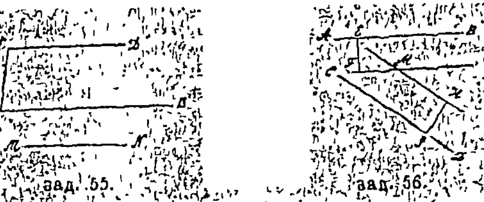
зад 54.

54. Данъ острый уголъ прямоугольнаго $\triangle$; построить другой острый уголъ.

При одной изъ сторонъ прямого угла строимъ данный острый уголъ, тогда дополненіе къ нему до прямого угла и будетъ искомымъ, другимъ острымъ угломъ.

55. Провести прямую, параллельную данной прямой и находящуюся отъ нея на данномъ разстояніи.

Положимъ, что дана прямая AB и требуется провести прямую CD на разстояніи MN отъ AB. Для этого изъ точки A возстановливаемъ къ прямой AB перпендикуляръ, откладываемъ на немъ отрѣзокъ AC=MN и черезъ точку C проводимъ CD || AB.



зад. 55. зад. 56.

56. Раздѣлить пополамъ уголъ, вершина котораго не помѣщ-ается на чертежѣ.

Когда вершина угла, составляемаго прямыми AB и CD, н помѣщается на чертежѣ, тогда для проведенія прямой, дѣляще уголъ пополамъ, поступаемъ слѣдующимъ образомъ. Къ прямой A проводимъ какой-нибудь перепендикуляръ EF, а также къ лині CD въ какой-нибудь ея точкѣ G перепендикуляръ къ ней GH Беремъ EF=GH и изъ точекъ F и H проводимъ параллельныя к AB и CD; пересѣченія ихъ дадутъ точку M, лежащую на искомой линіи, потому что разстояніе точки M до сторонъ угла одинаков Затѣмъ, на тѣхъ же перепендикулярахъ, беремъ другія два равныя разстоянія и опредѣляемъ другую точку биссектрисы, послѣ чего чрезъ полученныя двѣ точки проводимъ и биссектриссу.

57. Черезъ данную точку провести прямую подъ даннымъ уг-ломъ къ данной прямой.

Положимъ дана прямая AB; требуется чрезъ точку M провест прямую подъ угломъ m къ прямой AB. Для этого черезъ точку M про-ведемъ прямую CD || AB, при точкѣ M построимъ уголъ NMD, рав-ный данному $\angle m$, и сторону его NM продолжимъ до пересѣченія съ AB въ Z; тогда $\angle NMD = \angle MZB$, но $\angle NMB = \angle m$, слѣдова-тельно, $\angle MZB = \angle m$. Если при точкѣ M построимъ $\angle N_1MC = \angle m$, то тогда можемъ провести вторую прямую N_1Z_1, которая пересѣчетъ прямую AB подъ $= \angle MZ_1A = \angle N_1MC = \angle m$.



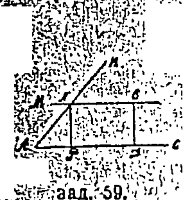
зад. 57. зад. 58.

58. Черезъ данную точку провести прямую такъ, чтобы о рѣзокъ ея, заключенный между двумя данными параллельными пр мыми, равнялся данной длинѣ.

Даны двѣ параллельныя прямыя AB и CD, точка M и длина ѣзка m. Чтобы рѣшить данную задачу изъ какой нибудь точки на прямой CD описываемъ дугу радіусомъ, равнымъ данному ѣзку m. Дуга эта пересѣчетъ прямую AB въ точкахъ Z и Z_1; ѣзки KZ и KZ_1 равны данному отрѣзку m. Затѣмъ черезъ точ- M проводимъ MN ∥ KZ и MN_1 ∥ KZ_1; Линіи MN_1 и MN будутъ омы. Если $m > KP$, то дуга, описанная радіусомъ$=m$, пресѣ- прямую AB въ двухъ точкахъ Z и Z_1 и получатся два рѣше- MN и MN_1; если $m = KP$, то дуга, описанная радіусомъ$=m$, нется прямой AB въ точкѣ P и тогда получится одно рѣшеніе наконецъ, если $m < KP$, то дуга не пересѣчетъ прямой AB и да задача невозможна, такъ какъ очевидно, что нельзя провести мой такой, чтобы ея отрѣзокъ между данными параллельными лъ бы меньше разстоянія между этими прямыми.

59. Между сторонами даннаго остраго угла помѣстить прямую нной длины такъ, чтобы она была перпендикулярна къ одной ронѣ угла.

Данъ уголъ BAC. Для того, чтобы рѣшить эту задачу, на ронѣ AC даннаго угла возстановляемъ изъ какой нибудь точки перпендикуляръ DE, равный данной прямой, и черезъ точку E водимъ прямую ME ∥ AC. Черезъ точку пересѣченія N этой мой со стороною угла BA проводимъ прямую NP ⊥ AC, которая будетъ искомая прямая.



зад. 59.

зад. 60.

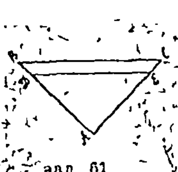
60. Между сторонами даннаго угла помѣстить прямую данной ины такъ, чтобы она отсѣкла отъ сторонъ угла равныя части.

Данъ ∠BAC. Проведемъ биссектриссу AD этого угла. Изъ кой нибудь точки E прямой AD возстановляемъ перпендикуляръ равный половинѣ данной прямой. Затѣмъ на продолженіе этого рпендикуляра откладываемъ отрѣзокъ EG равный половинѣ той данной прямой. Наконецъ въ точкахъ FG возстанавливаемъ къ EG, пересѣченія которыхъ M и N со сторонами AB и угла BAC соединяемъ прямою. Прямая MN будетъ искомая.

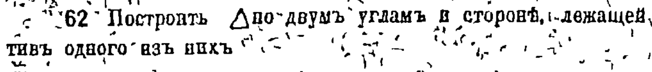
такъ какъ она равна FG и, будучи перепендикулярна къ биссек сѣ AD угла BAC, отсѣкаетъ отъ сторонъ угла BA и AC ра части AM и AN

61. Построить прямоугольный $\triangle$ по даннымъ острому уг противолежащему катету.

На одной изъ сторонъ прямого угла A откладываемъ отрѣ AC, равный данному катету, а на другой сторонѣ въ какой ни точкѣ D строимъ уголъ ADE, равный данному углу, на кон черезъ точку 6 проводимъ прямую BC || DE. Треугольникъ будетъ искомый.



зад 61   зад 63



62. Построить $\triangle$ по двумъ угламъ и сторонѣ, лежащей тивъ одного изъ нихъ

Вопросъ сводится къ предыдущей задачѣ, при чемъ $\angle$ можетъ быть $>90^\circ, =90^\circ$ и $\angle 90^\circ$.

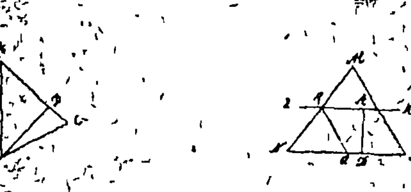
63. Построить равнобедренный $\triangle$ по углу при вершин основанію.

Рѣшеніе I-ое. Мы знаемъ, что сумма угловъ въ $\triangle$ равна а такъ какъ въ равнобедренномъ треугольникѣ углы при основ равны, то слѣдовательно, каждый изъ нихъ $= \frac{2d-m}{2}$ (гдѣ m = при верш.) Зная основаніе и углы къ нему прилежащіе, мы мож построить $\triangle$. (См рѣш зад. 19, в)

Рѣшеніе 2-ое. Раздѣлимъ данное основаніе BC пополам изъ средины его D. возстановляемъ перепендикуляръ DE, зат раздѣливъ уголъ при вершинѣ пополамъ при какой нибудь то F перепендикуляра DE, строимъ углы, равные половинѣ дан угла, и продолжаемъ ихъ стороны до пересѣченія ихъ съ пря BC въ точкахъ M и N. Проведя, наконецъ, прямую AB || FM AC || FN, получимъ искомый треугольникъ ABC

64. Построить равнобедренный △ по углу при основаніи и высотѣ, опущенной на боковую сторону.

Данъ уголъ ACB=∠ABC и высота AD. Между сторонами даннаго угла ACB помѣщаемъ прямую BD, равную данной высотѣ, такъ чтобы она была перпендикулярна къ сторонѣ AC (см. рѣш. зад. 59), а затѣмъ при B строимъ ∠ ABC, равный ∠ ACB. Треугольникъ ABC будетъ искомый.


зад 64. зад 66.

65. Построить △ равнобедренный по боковой сторонѣ и высотѣ, опущенной на нее.

Дана боковая сторона AB=AC и высота BD. Прямоугольный треугольникъ ABD, въ которомъ дана гипотенуза AB и катетъ BD мы знаемъ построить (см. зад. 21,b). Построивъ его продолжаемъ сторону AD и откладываемъ на ней отъ точки A отрѣзокъ AC=AB. Соединивъ B и C прямою, получимъ искомый треугольникъ ABC.

66. Построить равносторонній △ по его высотѣ.

Дана высота AD равносторонняго треугольника. Чтобы построить искомый треугольникъ, строимъ равносторонній треугольникъ MNP съ произвольной стороной (по 3 сторонамъ, см. Киселевъ § 65, зад. I), затѣмъ изъ какой-нибудь точки D на прямой NP возстановляемъ перпендикуляръ, на которомъ откладываемъ отрѣзокъ, *равный данной высотѣ* AD и через точку A проводимъ прямую LR || NP. Наконецъ, черезъ точку R пересѣченія прямой LR съ MN проводимъ прямую RQ || MP. Треугольникъ NRQ будетъ искомый.

67. Раздѣлить прямой ∠ на 3 равныя части.

Построивъ равносторонній △, раздѣлимъ одинъ изъ угловъ пополамъ. Въ самомъ дѣлѣ въ равностороннемъ △ всѣ три угла

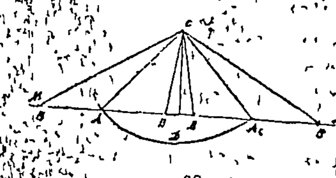
равны, почему каждый изъ нихъ равенъ $\frac{2d}{3}$; раздѣливъ этотъ на 2, получимъ $\frac{2d}{3}:2={}^1/_3d$.

68. Построить △ по основанію, высотѣ (проведенной к основанію) и къ боковой сторонѣ.

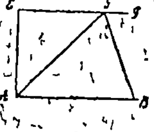
На произвольной прямой MN возстановляемъ перпендик CD, равный высотѣ, и изъ точки C, радіусомъ AC, равнымъ ной сторонѣ, описываемъ окружность. Пересѣченіе окружност прямой MN въ точкахъ A и A_1, дастъ одну изъ вершинъ иск треугольника. Откладывая на MN отъ точекъ A и A_1 вправо влѣво отъ нихъ отрѣзки AB и A_1B_1, равные данному основа соединивъ точки B и B_1 съ C, получимъ 4 треугольника, р искомому.

69. Построить △ по основанію, высотѣ и углу при осно

Пусть ABC будетъ искомый треугольникъ. Данъ ∠ A, ваніе AB и высота CD=h. На прямой откладываемъ отрѣзокъ ный основанію AB, въ точкѣ A строимъ ∠ CAB, равный да углу, а изъ точки A возстановляемъ ⊥ AE=h къ AB. П проводимъ линію EF=AB. Третья вершина находится, очев на этой параллельной, слѣдовательно, она будетъ въ точкѣ которой прямая EF пересѣкаетъ AC. Наконецъ проводимъ CB



зад. 68.



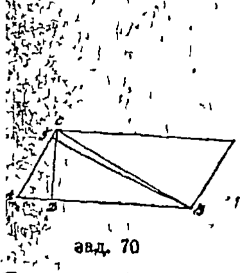
зад. 69.

70. Построить △ по углу и 2 высотамъ, опущеннымъ стороны этого угла.

Пусть ABC будетъ искомый треугольникъ. Извѣстны ∠ высота CD=h и высота BF=h'. Строимъ ∠ CAB равный дан углу; въ разстояніи h отъ AB проводимъ параллельную линію торая пересѣкая AC, опредѣлитъ вершину C, а въ разстояніи h' AC проводимъ къ этой прямой параллельную линію, которая, сѣкая AB, опредѣлитъ точку B; такимъ образомъ получаемъ тре ABC, удовлетворяющій условіямъ задачи.

71. Построить $\triangle$ по сторонѣ, суммѣ двухъ другихъ сторонъ и высотѣ, опущенной на одну изъ этихъ сторонъ.

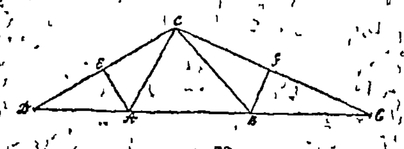
Положимъ, что данный $\triangle$ будетъ ABC. Въ немъ дано BC, AB+AC=s и высота CD=h. На продолженіи стороны AB откладываемъ линію AE=AC и соединяемъ E съ C; получимъ $\triangle$ EBC, въ которомъ данв BE=s, BC и CD. По этимъ даннымъ легко его построить. Въ равнобедренномъ $\triangle$ EAC проведемъ медіану AF; мы замѣчаемъ, что въ треу-кахъ AEF и AFC сторона AF общая, AE=AC и EF=FC, слѣдовательно эти $\triangle$-ки равны и потому $\angle$ AFC=$\angle$ AFE=90°, слѣдовательно, AF есть перпендикуляръ, возстановленный къ срединѣ прямой EC. И такъ, чтобы построить искомый $\triangle$, строимъ сначала $\triangle$ BEC, изъ средины EC возстановляемъ перпендикуляръ AF до пересѣченія съ BE въ A и затѣмъ соединяемъ A съ C прямою. Т-никъ ABC искомый.



зад. 70 зад. 71

72. Построить $\triangle$ по двумъ даннымъ угламъ и периметру.

Предположимъ, что задача рѣшена, и пусть ABC будетъ требуемый $\triangle$. Если на противоположныхъ продолженіяхъ его стороны AB отложимъ отъ точекъ A и B части AD=AC и BE=BC, то будемъ имѣть DE=2p, а изъ равенствъ AD=AC и BE=BC, ви-

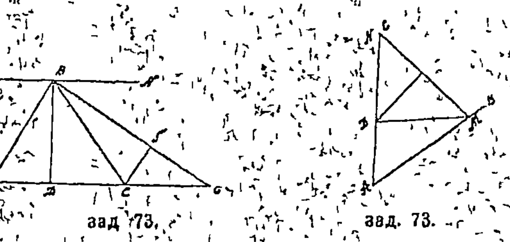


зад. 72.

димъ, что $\triangle$-ки DAC и CBE равнобедренны и что углы у нихъ при основаніи опредѣляются данными углами: $\angle$ D=$^1/_2\angle$ CAB и $\angle$E=$^1/_2\angle$CBA, вмѣстѣ съ тѣмъ очевидно опредѣляется мѣсто вершинъ A и B и задача разлагается на 2 слѣдующія: 1) построить

треугольникъ, зная его сторону и прилежащие ей углы, и 2) во становить перпендикуляръ изъ средины прямой. И такъ, на пр мой DE=данному периметру 2p строимъ △-къ DEC, у котор $\angle D = \frac{1}{2}\angle A$ и $\angle E = \frac{1}{2}\angle B$. Изъ средины E и g возстановляе перпендикуляры до встрѣчи съ DE въ точкахъ A и B, прове прямыя AC и BC, получимъ требуемый △ABC.

73. На какой нибудь прямой AC при точкѣ A строимъ ∠BA равный данному углу, и затѣмъ изъ какой нибудь точки D прям AC, принявъ ее за основаніе искомаго треугольника, на разстоя h, т. е. на разстояніи, равномъ данной высотѣ, проводимъ прям MN, параллельную AC, которая пересѣчетъ сторону AB уг BAC въ точкѣ B. Эта прямая AB есть одна изъ сторонъ искома △-ка. Такимъ образомъ задача сводится къ задачѣ: Построить по данной сторонѣ по прилежащему углу и по суммѣ 2-хъ др гихъ сторонъ.

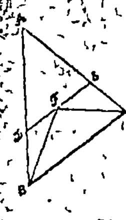


зад. 73. зад. 73.

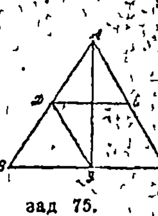
Предположимъ, что требуемый △-къ построенъ, а именно ADM есть искомый, въ которомъ ∠MAD=данному ∠A, сторо AM=данной сторонѣ b и суммъ сторонъ AD+DM=s. На продо женіи стороны AD откладываемъ часть DN=стороны DM; соед нивъ точки M и N прямою MN, получаемъ равнобедренный △MD Если изъ средины E основанія MN равнобедреннаго △-ка MD проведемъ перпендикуляръ DE, который по свойству равнобедре раго △-ка, пройдетъ чрезъ его вершину D, то D будетъ треть точкой искомаго △-ка. И такъ мы видимъ, что для построенія и комаго △-ка по даннымъ s, b и A должно поступить такъ: на к кой-нибудь произвольной прямой AB при точкѣ A строимъ ∠BAC= =данному ∠-у; затѣмъ на сторонахъ его AB и AC откладывае части AM=данной сторонѣ b, и AN, равную данной длинѣ s, соединивъ точки N и M прямою NM, получаемъ △ANM. Ес мы въ этомъ △-кѣ изъ средины E стороны NM возстановили пе

пендикуляръ, который пересѣчетъ сторону AN въ точкѣ D, то, соединивъ эту точку съ M прямою DM, получимъ искомый $\triangle$ ADM.

74. Положимъ, что прямая DE искомая прямая, а DF=DB и FE=EC. Соединивъ точку F съ B и C, получимъ 2 равнобедренные $\triangle$ BDF и FEC. Имѣемъ $\angle ADF = \angle DBF + \angle DFB = 2\angle DBF$, откуда $\angle DBF = \frac{1}{2}\angle ADF = \frac{1}{2}\angle ABC$, т. е. линія BF будетъ биссектриссой угла ABC; точно также FC будетъ биссектриссой $\angle$ ACB, слѣдовательно, точка F лежитъ въ пересѣченіи двухъ биссектриссъ BF и FC. Отсюда ясно построеніе.

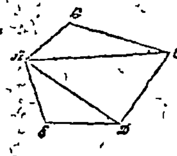


зад. 74.



зад 75.

75. Положимъ, что задача и что искомая прямая DE найдена тогда AD=EC. Проводимъ черезъ точку D прямую DF || AC; получимъ DF=EC=AD. Соединивъ точки A и F прямою, получимъ равнобедренный $\triangle$ ADF, почему $\angle DAF = \frac{1}{2}\angle BDF = \frac{1}{2}\angle BAC$, т. е. линія AF будетъ биссектриссой $\angle$ BAC. Изъ этого слѣдуетъ, что для рѣшенія задачи должно провести биссектриссу $\angle$ A, черезъ F точку пересѣченія ея съ основаніемъ BC провести прямую DF || AC и черезъ точку D прямую DE || BC. Прямая DE будетъ искомая.



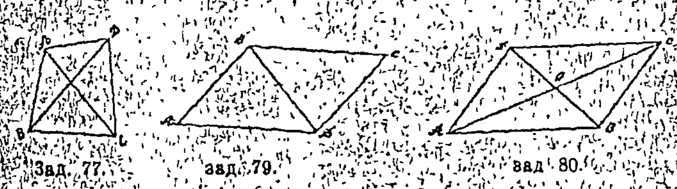
зад 76.

76. Проводимъ въ данномъ многоугольникѣ всѣ діагонали AC, AD, выходящія изъ одной вершины A. Строимъ $\triangle$-ки $A_1B_1C_1$, $A_1C_1D_1$, $A_1D_1E_1$, соотвѣтственно равные тр-камъ ABC, ACD, ADE. Полученный многоугольникъ $A_1B_1C_1D_1E_1$ будетъ требуемый, ибо составленъ изъ $\triangle$-ковъ равнаго числа, одинаково расположенныхъ и равныхъ тр.-камъ даннаго многоугольника.

77. Положимъ, что даны ∠ A, B, C, и 2 стороны AD и C… образующія 4-й уголъ D. Мы знаемъ, что сумма внутреннихъ у… ловъ многоугольника $=2d$, умноженнымъ на число сторонъ -2, т… въ данномъ случаѣ: $2d(4-2)=2d.2=4d$, почему искомый ∠D $=4d-(A+B+C)$. Построивъ ∠D, откладываемъ на его стор… нахъ отрѣзки, равные сторонамъ AD и CD. Затѣмъ при точкѣ… строимъ уголъ = данному ∠ A, и при точкѣ C уголъ, = данно… ∠ C. Продолжая стороны ∠A и C до пересѣченія въ точкѣ… найдемъ четвертую вершину искомаго 4-ка ABCD.

78. Даны стороны AB, BC, CD и діагонали AC и BD. Стро… имъ сперва △ ABC по 3 даннымъ сторонамъ, затѣмъ на BC △ BC… тоже по 3 даннымъ сторонамъ. Наконецъ, соединивъ прямою вер… шины A и D, построенныхъ △-ковъ ABC и BCD, получимъ ис… комый 4-реугольникъ ABCD.

79. Положимъ, даны двѣ стороны AB и AD и діагональ BD. Построивъ треугольникъ ABD по 3 даннымъ сторонамъ, проводим… черезъ B прямую BC ∥ AD и черезъ D прямую DC ∥ AB. Пересѣ… ченіе прямыхъ BC и DC въ точкѣ C опредѣляетъ четвертую вер… шину искомаго параллелограмма.


Зад. 77. зад. 79. зад. 80.

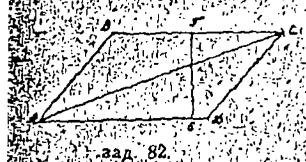
80. Даны діагонали и сторона AB. Стало быть, всѣ три сто… роны △-ка AOB извѣстны. Строятъ этотъ △-къ: продолжаютъ ли… нію AO на длину $OC=AO$ и OB на длину $OD=OB$, потомъ про… водятъ AD, DC и BC.

81. Положимъ, даны діагонали AC и DB и ∠ AOB. Строимъ △ AOB, въ которомъ извѣстны ∠O и стороны AO и BO, потомъ достраиваемъ параллелограмъ. (См. рѣш. зад. 80).

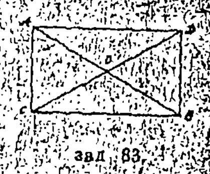
82. Дано основаніе AD, высота FE и діагональ AO. На пря… мой AD изъ какой-нибудь точки E возстанавливаемъ перпендику… ляръ EF, равный данному, затѣмъ чрезъ точку F проводимъ пря… мую BC ∥ AD, наконецъ изъ точки A описываемъ дугу радіусомъ равнымъ діагонали AC. Пересѣченіе этой дуги въ точкѣ C съ пря…

мою BC определять одну изъ вершинъ параллелограма. Соединяя точку C и Д и затѣмъ проведя чрезъ точку A прямую AB || CD, получимъ искомый параллелограммъ ABCD.

83. Проводя прямыя AB и CD подъ даннымъ угломъ и взявъ OA, OB, OC и OD равными между собою и равными половинѣ данной діагонали, находимъ въ ABCD искомый прямоугольникъ.



зад. 82.

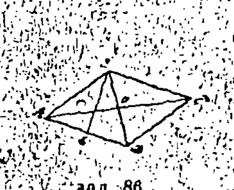


зад. 83.

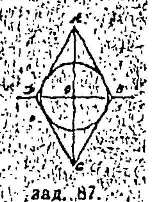
84. Рѣшеніе то же, что и въ зад. № 79, только AB=AD.

85. Эту фигуру цостроить легко, помня что въ ромбѣ діагонали перпендикулярны и дѣлятся пополамъ.

86. Дана высота BE и діагональ BD. Построивъ прямоугольный △ BDE по катету BE и гипотенузѣ BD (см. рѣш. зад. 21,b) продолжимъ другой катетъ его ED влѣво и чрезъ вершину B проводимъ прямую BC || ED. Затѣмъ изъ средины O гипотенузы BD возстанавливаемъ по обѣ стороны ея перпендикуляръ AOC. Точки пересѣченія этого перпендикуляра съ прямыми AD и BC опредѣлять двѣ другія вершины ромба. Такимъ образомъ искомый ромбъ будетъ ABCD.



зад. 86.



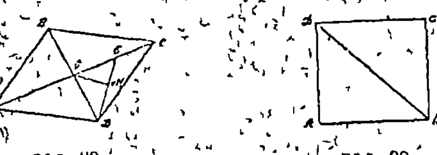
зад. 87.

87. Зная одинъ уголъ, знаемъ и остальные. Положимъ, что задача рѣшена и пусть ABCD искомый ромбъ. Въ прямоугольномъ △ AOB извѣстны ∠ ABO=$^1/_2$B и сторона BO=$^1/_2$BD, и потому можно построить этотъ треугольникъ, а слѣдовательно, и ромбъ.

88. Данъ ∠ BAD и діагональ BD. Такъ какъ въ △ ABD сторона AB=AD, то онъ будетъ равнобедреннымъ, въ которомъ дано основаніе BD и ∠A при вершинѣ. Этотъ △ мы можемъ по-

строить (см. рѣш. зад. 63). Проведя чрезъ В прямую BC || AD, чрезъ D прямую DC || AB, найдемъ четвертую вершину C ромба ABCD. (См. чертежъ зад. № 86).

89. Дана сумма діагоналей ромба $AC+BD=s$ и $\angle CA$... Чтобы построить искомый ромбъ, построимъ сперва $\triangle AOD$, въ которомъ данъ $\angle OAD$, $\angle AOD=d$, и уголъ $ODA=d-\angle OD$... и кромѣ того $AO+OD={}^1/_2AC+{}^1/_2BD={}^1/_2 s$. Чтобы построить его продолжимъ AO на длину $OE=OD$. $\triangle OED$ равнобедренный, вслѣдствіе этого $\angle OED={}^1/_2\angle AOD={}^1/_2d$ сверхъ того извѣстенъ $\angle OA$... и сторона AE, поэтому $\triangle AED$ можетъ быть построенъ. Строимъ его и въ срединѣ линіи ED возстанавливаемъ перпендикуляръ OM, который опредѣлитъ вершину O $\triangle AOD$. Наконецъ проводимъ OD. Итакъ, мы построимъ $\triangle AOD$. Продолжая OD на длину $OB=OD$ и AO на длину $OC=AO$, опредѣлимъ вершины B и C ромба. Соединяя A съ B, B съ C, C съ D прямыми, получимъ искомый ромбъ ABCD.



зад 89. зад. 90.

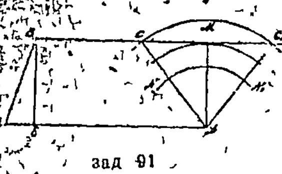
90. Эта задача сводится на построеніе равнобедреннаго $\triangle$ въ которомъ даны основаніе BD и прямой уголъ при вершинѣ (см. рѣш. зад. № 63). Построивъ $\triangle$ ABD, проводятъ чрезъ точки D и B параллельныя къ AB и AD, которыя опредѣлятъ точку C.

91. Дано основаніе AD, параллельныя стороны AB и DC и $\angle BAD$. На прямой AD при точкѣ A строимъ $\angle BAD$, равный данному, а на сторонѣ AB откладываемъ одну изъ непараллельныхъ сторонъ. Черезъ точку B проводимъ прямую BC || AD и, наконецъ, изъ точки D описываемъ дугу радіусомъ, равнымъ второй непараллельной сторонѣ DC. Точка перечисленія C описанной дуги съ прямою BC опредѣлитъ четвертую вершину трапеціи.

Если $CD>BE$ (гдѣ BE высота трапеціи) то дуга, описанная радіусомъ, равнымъ CD, пересѣчетъ прямую BC и въ двухъ точкахъ и тогда получимъ двѣ трапеціи ABCD и ABC_1D. Если $CD=BE$, то дуга коснется прямой BC въ точкѣ M и получимъ одну только

трапецію ABMD. Если $CD < BE$, то дуга NN_1 не можетъ пересѣчь прямой BC и потому трапеціи построить нельзя.

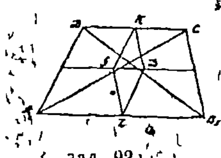
92. Даны двѣ непараллельныя стороны AB и CD и разность основанія $AD - BC = AE$. Строимъ $\triangle ABE$ по 3 даннымъ сторонамъ, затѣмъ, черезъ точку B проводимъ прямую $BC \parallel AE$. Изъ точки A описываемъ дугу радіусомъ, равнымъ данной діагонали. Точка пересѣченія C этой дуги съ прямою BC опредѣлитъ третью вершину C искомой трапеціи. Проведя чрезъ точку C прямую $CD \parallel BE$, въ точкѣ D пересѣченія ея съ продолженіемъ AE найдемъ четвертую вершину искомой трапеціи ABCD.

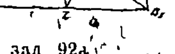


зад 91

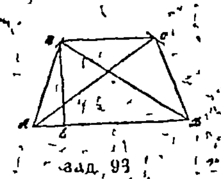
зад. 92.

92a) Предположимъ, что задача рѣшена, и пусть ABCD будетъ искомая трапеція, стороны которой AB, BC, CD, DA обозначимъ чрезъ a, b, c, d. Зная стороны трапеціи, мы знаемъ длину линіи EE', соединяющей средины непараллельныхъ сторонъ, именно $EE' = \frac{1}{2}(a+c)$ и длину отрѣзка gD', захватываемаго на линіи EE' діагоналями трапеціи, именно $gD' = \frac{1}{2}(a-c)$ *). Построивъ на отрѣзкѣ gD' $\triangle gD'K$, имѣющій двумя другими сторонами $gK = \frac{1}{2}d$ и $D'K = \frac{1}{2}b$, и потомъ построивъ параллелограммъ gKD'Z, проводимъ чрезъ его вершины K и Z параллельныя линіи gD'... и проч.





зад 92а



зад. 93

93. Дано основаніе AD, высота BE и діагонали AC и BD. Изъ какой-нибудь точки E основанія AD возстанавливаемъ перпендикуляръ, на которомъ откладываемъ отрѣзокъ, равный данной высотѣ BE. Чрезъ точку B проводимъ прямую $BC \parallel AD$. Изъ точки A описываемъ дугу радіусомъ, равнымъ діагонали AC, а изъ точки

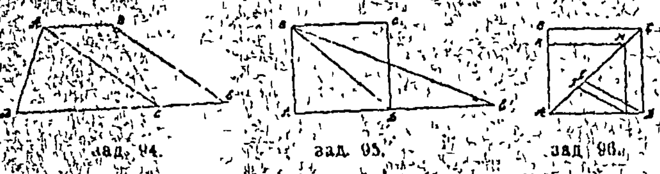
*) См. 1-е примѣчаніе въ концѣ сборника.

D дугу радіусомъ, равнымъ діагонали BD. Точки пересѣченія B и C этихъ дугъ съ прямою BC опредѣлятъ двѣ другія вершины трапеціи. Соединяя A съ B и C съ D, найдемъ искомую трапецію ABCD.

94. Въ искомой трапеціи ABCD даны: AC, AB, BD, DC. Проведя BE || AC, видимъ, что CE=AB и BE=AC, слѣдовательно, △ DBE можно построить по 3 сторонамъ, такъ какъ DE=DC+CE=DC+AB. Затѣмъ, проведя AB || DE и отложивъ на ней линію равную AB, получимъ 4-ую вершину трапеціи A.

95. Пусть ABCD будетъ искомый квадратъ, т. е. такой, въ которомъ сумма діагонали BD и сторона AD равна данной линіи s. Чтобы имѣть эту данную линію на фигурѣ, продолжимъ сторону AD квадрата на разстояніе DE=DB. Это равенство DE=DB указываетъ намъ равнобедренный △ DBE, котораго $\angle E = \frac{1}{2}\angle ADB = \frac{d}{4}$, слѣдовательно, прямоугольный △ ABE опредѣленъ: знаемъ его катетъ AE=s и $\angle E = \frac{d}{4}$. Построимъ этотъ △ ABE; другой его катетъ AB будетъ стороной искомаго квадрата.

Другой способъ: Обозначивъ чрезъ x сторону и чрезъ y діагональ искомаго квадрата будемъ имѣть: $y+x=s$, $\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{2}}{1}$, $\frac{y+x}{x}=\frac{\sqrt{2}+1}{1}$, слѣдов. $\frac{s}{x}=\frac{\sqrt{2}+1}{1}$, т. е. сторона x искомаго квадрата есть четвертая пропорціональная къ 3-мъ линіямъ: s, $\sqrt{2}+1$ и 1.

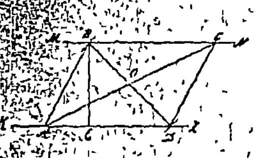


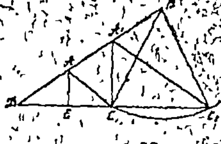
зад. 94. зад. 95. зад. 96.

96. Основываясь, какъ во II-мъ рѣшеніи предыдущей задачи, на томъ, что отношеніе діагонали квадрата къ его сторонѣ есть количество постоянное $\sqrt{2}$, дѣлаемъ слѣдующее построеніе: На діагонали AC какого-нибудь кв-та ABCD опредѣляемъ отрѣзокъ AE=AC—CD и на той же AC откладываемъ отъ точки A линію AF=d, данному избытку діагонали надъ стороной искомаго квадрата; проводимъ линію ED и изъ точки F проводимъ параллельную

мой ED до встрѣчи со стороною AD въ точкѣ G. Квадратъ KHR будетъ искомый.

97. Даны 2 діагонали AC и BD и высота BE искомаго параллелограмма. Проводимъ двѣ параллельныя линіи KZ и MN, разстояніе между которыми = высотѣ BE искомаго параллелограмма; затѣмъ, изъ какой-нибудь точки A, на прямой KZ описываемъ дугу радіусомъ, равнымъ діагонали AC, до пересѣченія ея съ прямою MN въ точкѣ C. Раздѣливъ діагональ AC пополамъ, изъ средины ея O, радіусомъ, равнымъ $^1/_2$ діагонали BD, описываемъ дуги. Точки B и D пересѣченія ихъ съ прямыми ZK и MN опредѣлятъ двѣ другія вершины искомаго параллелограмма ABCD.


зад. 97.


зад. 98.

98. Чтобы рѣшить эту задачу, мы построимъ △ ABC, въ которомъ извѣстны сторона BC, противолежащій ∠ A и сумма AB+AC. Продолжимъ AB на длину AD=AC. △DAC равнобедренный; вслѣдствіе этого, ∠BAC=2d, откуда D=$^1/_2$BAC. Отсюда вытекаетъ слѣдующее построеніе: строятъ ∠D=$^1/_2$BAC; берутъ DB=BA+AC, и изъ точки B, какъ изъ центра радіусомъ BC описываютъ дугу, которая пересѣчетъ линію DC въ точкѣ C. Перпендикуляръ EA, возстановленный изъ средины линіи DC, опредѣлитъ вершину A. Проводимъ AC и BC и получимъ △ ABC *). Продолживъ AB на длину AM=AB и AC на длину AN=AC, соединимъ точки M съ C, M съ N и N съ B, тогда получимъ искомый параллелограммъ MNBC.

99. Предположимъ, что △ ABC искомый; въ немъ даны стороны AB и BC и медіана BO. Отложивъ на продолженіи BO отрѣзокъ OD, равный BO, и соединивъ точку D съ вершинами A и C, получимъ параллелограммъ ABCD, въ которомъ извѣстны AB, BC и BD. Параллелограммъ ABCD легко построить; для этого должно изъ A и D радіусами, равными AB и BD=2BO, опи-

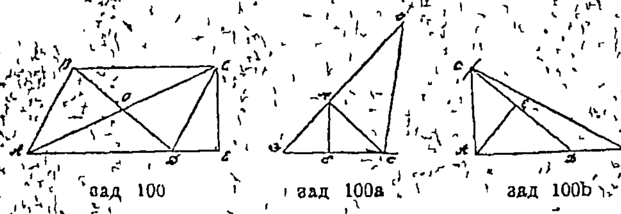
зад. 99.

*) См. 2-е примѣчаніе въ концѣ сборника.

сать окружность и точку ихъ пересѣченія В соединить съ точ
А и D. Точка В будетъ третьей вершиной параллелограмма,
тѣмъ, чрезъ В проведемъ линію BC ∥ AD и чрезъ D линію DC
Точка ихъ пересѣченія C даетъ четвертую вершину параллелог
ма. Соединивъ AC прямою, получимъ искомый △ ABC.

100. Положимъ ACD искомый треугольникъ: въ немъ д
сторона AD, его высота CE и медiана OD. Отложивъ на про
женіи OD отрѣзокъ OB=OD и соединивъ точку B съ верши
A и C, получимъ параллелограммъ, который можемъ построит
даннымъ AD, BD, CE. Проведя діагональ AC, получимъ иско
△ ACD.

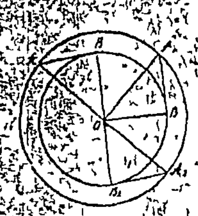
100a). Предположимъ, что задача рѣшена, и пусть ABC
детъ искомый прямоугольный △. Въ немъ извѣстны гипоте
BC и сумма катетовъ AB+AC Продолжимъ катетъ AB на д
AD=AC. △DAC равнобедренный, вслѣдствіе этого ∠ BAC=2∠A
откуда ∠ADC=$^1/_2$∠ BAC. Отсюда слѣдуетъ построеніе: стр
∠ADC=$^1/_2$d, берутъ DB=BA+AC и изъ точки B, какъ
центра, радіусомъ BC описываютъ дугу, которая пересѣчетъ л
DC въ точкѣ C. Перпендикуляръ EA, возстановленный изъ сред
линіи DC, опредѣлитъ вершину A. Проводимъ AC и BC и за
будетъ рѣшена.



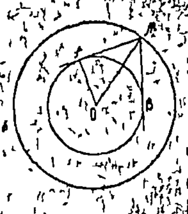
зад 100 зад 100a зад 100b

100b). Пусть ABC будетъ искомый треугольникъ. Дана ги
тенуза BC и разность катетовъ BA—AC. Возьмемъ прямую AD
AC и проведемъ DC. Въ равнобедренномъ △ ADC ∠ ADC=
Но ∠ CDB =2d—$^1/_2$d=1$^1/_2$d Отсюда слѣдующее построеніе: стро
∠ BDC=1$^1/_2$d; берутъ DB=BA—AC и изъ точки B, какъ
центра, радіусомъ BC описываютъ дугу, пересѣкающую линію
въ точкѣ C. Продолжаютъ BD и въ срединѣ DC возстановля
перпендикуляръ, который опредѣляетъ вершину; наконецъ про
дятъ AC, и задача рѣшена.

101. Предположимъ, что нѣсколько искомыхъ точекъ B, B^1 и уже найдены, тогда $AB = A^1B^1 = A^2B^2 = a$. Такъ какъ $\triangle\triangle$ ABO, B^1O, A^2B^2O прямоугольные, то имѣемъ: $AO = \sqrt{AB^2 + BO^2} = \sqrt{A^1B^{1\,2} + B^1O^2} = \sqrt{A_2B_2^2 + B_2O^2} = \sqrt{a^2 + r^2}$. Отсюда заключаемъ, что искомымъ мѣстомъ точекъ будетъ окружность концентрическая съ данной и описанная радіусомъ равнымъ $\sqrt{a^2 + r^2}$.



зад. 101.

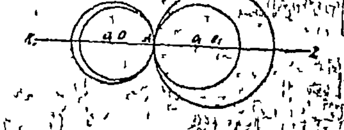


зад. 102.

102. Положимъ, что нѣкоторая точка M удовлетворяетъ вопросу, такимъ образомъ, что $\angle AMB$, образованный касательными AM и BM, равенъ данному углу. Изъ центра O радіусомъ равнымъ OM, опишемъ концентрическую окружность, которая и будетъ геометрическимъ мѣстомъ искомыхъ точекъ, т. к. для всякой точки M, расположенной на этой окружности, OM и OA остаются постоянными, почему и $\angle AMO$, равный половинѣ даннаго $\angle AMB$, есть величина постоянная. Радіусъ OM мы находимъ какъ гипотенузу прямоугольнаго треугольника, катетами котораго суть радіусъ OA и касательная AM.

103. Искомое геометрическое мѣсто будетъ находиться на линіи параллельной данной прямой въ разстояніи даннаго радіуса отъ нея съ обѣихъ сторонъ.

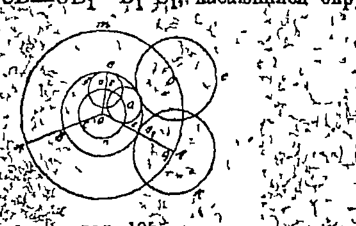
104. Черезъ данную точку A и черезъ O, центръ данной окружности, проводимъ линію KZ, которая будетъ искомымъ геометрическимъ мѣстомъ; на этой линіи KZ будутъ лежать O_1, O_2, O_3, центры всѣхъ касающихся окружностей.



105. I. Касаніе внѣшнее; искомое геометрическое мѣсто будетъ окружность «m» (самая большая), радіусъ которой равенъ

OA_1 т. е. суммѣ радіусовъ OB_1 (данной окружности), и B_2A_1 ...наго радіуса); касающіяся окружности: К и l;

II. Касаніе внутреннее, искомое геометрическое мѣсто ...ность «n», радіусъ которой ровенъ OC, т. е.: разности раді... $OB-CB=OB_1-B_1C_1$; касающіяся окружности: f и e.

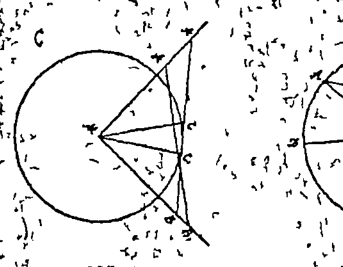


зад 105

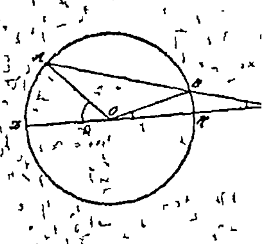
зад 106

106. Пусть O будетъ центръ данной окружности, по ко... движется прямая длины AA_1; A и B—два положенія конца прямой на данной окружности; A_1 и B_1—положенія проваго ... въ пространствѣ, при чемъ $AA_1 = \| BB_1$; проводимъ $OO_1 \| =$ ... и соединимъ AO, OB, OA_1, OB_1; фигуры: OAA_1O_1, $OBB_1O...$ ...раллеллограмы, откуда получаемъ: $OA=OA_1$ и $OB=O_1B_1$; слѣд., ... $OA=OB$, какъ радіусы одной окружности, то $O_1B_1=O_1A_1$, т. е. ...комое геометрическое мѣсто есть окружность, радіусъ которой = ...діусу данной и центръ которой находится на $OO_1 \| AA_1$ на ра...яніи AA_1 отъ даннаго центра.

107. AB и A_1B_1—два положенія одной и той же прямой; ... прямоугольныхъ $\triangle$-овъ AMB и A_1MB_1 находимъ: $MC=\frac{AB}{2}=\frac{A_1B_1}{2}$ $=MC_1$ и искомое геометрическое мѣсто есть окружность ра... $MC=\frac{AB}{2}$



зад. 107.



зад. 107а.

107. а) Такъ какъ BC=BO, то △ OBC равнобедренный и ∠BCO=∠BOC; ∠BOC измѣряется ⌣BK, а ∠BCO измѣряется $\frac{⌣AD-⌣BK}{2}$, откуда: $\frac{⌣AD-⌣BK}{2}$ = ⌣BK, и ⌣AD−⌣BK= 2⌣BK, откуда ⌣AD=3⌣BK и ∠AOD=3∠BOK=3∠BCO=3∠ACD.

108. Дана точка A внѣ окружности. I требуется доказать, что AB короче любой прямой, наприм. AM; изъ △ AMO имѣемъ: AB+BO<AM+MO, откуда AB<AM; II требуется доказать, что AC длиннѣе всякой другой линіи, напр. AN; изъ △ ANO имѣемъ: AO+ON>AN, или AO+OC>AN, или AC>AN.

зад 108.

зад 109.

109. Доказать, что $AB<A_1B_1$, проводимъ OA_1 и O_1B_1, получимъ: $OA+AB+BO_1<OA_1+A_1B_1+B_1O_1$, откуда имѣемъ: $AB<A_1B_1$.

110. Черезъ данную точку M проходятъ двѣ хорды AB и A_1B_1; доказать, что $AB<A_1B_1$; замѣтимъ, что AB⊥OM, проведемъ ON⊥A_1B_1; изъ △ OMN имѣемъ, что ON<OM, слѣд., хорда A_1B_1 ближе къ центру и поэтому $A_1B_1>AB$.

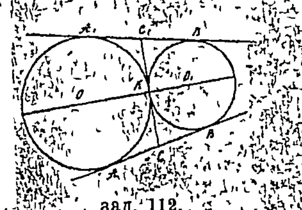
зад. 110.

зад. 111.

111. Черезъ точку C пересѣченія проведены хорды A_1B_1 и AB ∥ KZ; требуется доказать, что $AB>A_1B_1$; для этого опустимъ изъ центровъ O и O_1 перпендикуляры: OM, O_1M_1, ON и O_1N_1; $M_1C=\frac{BC}{2}$ и $MC=\frac{AC}{2}$, откуда $MC+CM_1=MM_1=\frac{BC}{2}+\frac{AC}{2}=\frac{AB}{2}=OO_1$; точно также $NN_1=\frac{A_1B_1}{2}=EO_1$; вмѣсто того, чтобы доказы-

вать, что $AB > A_1B_1$, можно доказать, что $\frac{AB}{2} > \frac{A_1B_1}{2}$, т. е. $OO_1 > O_1E$; это очевидно изъ $\triangle\ OEO_1$.

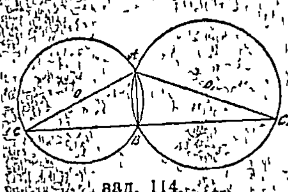
112. Касательныя, проведенныя изъ одной точки къ окру[ж]ности равны; слѣд., $CB = CK = CA$ и $C_1A_1 = C_1K = C_1B_1$.



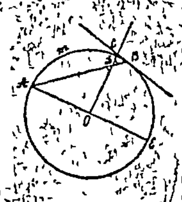
зад. 112. зад. 113.

113. Въ большей окружности хорда AB = хордѣ A_1B_1; значит[ъ] онѣ равно удалены отъ центра, т. е. $OC = OC_1$ и окружность, пр[о]веденная этимъ радіусомъ OC будетъ касаться хордъ AB и A_1B_1.

114. Соединимъ C съ B и C_1 съ B; кромѣ того, соедини[мъ] A и B; $\angle ABC = d$, т. к. онъ опирается на діаметръ; точно так[ъ] $\angle ABC_1 = d$; слѣдовательно $\angle ABC + \angle ABC_1 = 2d$ и линіи BC [и] BC_1 составляютъ продолженіе одна другой.



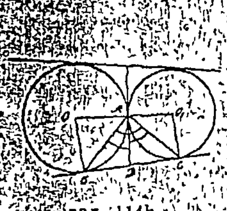
зад. 114.

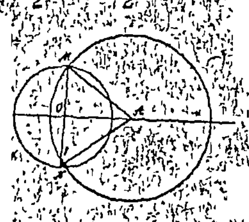


зад. 114а.

114, а. $\angle DBC$ измѣряется $\frac{\smile AmB}{2}$; $\angle BDC = ADO = d - \angle DAO$ (т. к. $\triangle ADO$ прямоугольный); $\angle DAO + \angle ADO = 90^0 = d$, т. е. измѣряются полуокружностью EBA, дѣленной на 2; $\angle DAO = \angle BAE$ измѣряется $\frac{\smile BE}{2}$; слѣд., $\angle ADO = \angle BDC$ измѣряется $\frac{\smile EBA - \smile EB}{2} = \frac{\smile AmB}{2}$, откуда слѣдуетъ, что $\angle DBC = \angle BDC$ и $\triangle BDC$—равнобедренный, $BC = CD$.

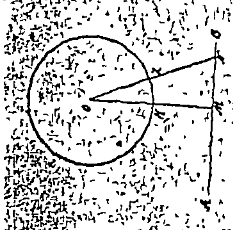
114в. $\angle DAC = \angle \frac{AO_1C}{2}$, т. к. они опираются на одну и же дугу; по той же причинѣ $\angle BAD = \angle \frac{AOB}{2}$; слѣд. $\angle BAC = \angle BAD + \angle DAC = \angle \frac{BOA + \angle AO_1C}{2}$, а т. к. въ четырехугольникѣ BOO_1C $\angle\angle OBC$ и O_1CB прямые, то $\angle BOA + \angle AO_1C = 2d$; отсюда слѣдуетъ, что $\angle BAC = \angle \frac{BOA + \angle AO_1C}{2} = \frac{2d}{2} = d$.

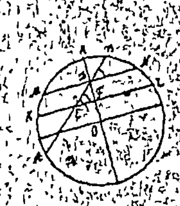

зад. 114b


зад. 117

117. Проводимъ черезъ данную точку A и черезъ центръ даннаго круга O прямую линію; проводимъ черезъ точку O $MN \perp AO$; $AM = AN$ есть центръ искомой окружности.

118. Изъ точки O опускаемъ $OM \perp AB$; KM будетъ разстояніемъ наименѣе удаленной точки M; нужно доказать, что $KM < ZN$ — разстоянія какой-либо другой точки N; и въ самомъ дѣлѣ, $OM < ON$, какъ перпендикуляръ меньше наклонной; отсюда слѣдуетъ, что $OK + KM < OZ + ZN$, или $KM < ZN$.

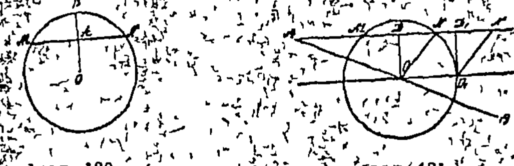

зад. 118


зад. 119

119. Данная хорда AB; центръ круга O; пусть искомая хорда MN составляетъ съ данной $\angle BDN$ и дѣлится ею пополамъ въ точкѣ D; проведемъ черезъ точку D діаметръ, онъ будетъ $\perp MN$, т. к. діаметръ $\perp$ къ хордамъ въ ихъ срединѣ; проведемъ, кромѣ того, $KZ \parallel MN$; тогда $\angle BEZ = \angle BDN$ и діаметръ перпендикуляренъ

и дѣлить пополамъ въ точкѣ F эту линію KZ; отсюда слѣ
построеніе: въ произвольной точкѣ E проводимъ хорду KZ
даннымъ угломъ къ данной хордѣ AB и проводимъ OR ⊥ KZ
да D будетъ пересѣченіе искомой хорды съ AB; черезъ D п
димъ MN ∥ KZ.

120. Данную точку A соединяемъ съ центромъ круга O
тѣмъ проводимъ MN ⊥ OA; MN есть искомая хорда.

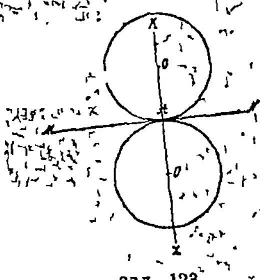


зад 120. зад. 121.

121. Пусть искомая окружность построена; ∠BAC—дан
кромѣ того дано положеніе точки и длина хорды MN; изъ точ
опускаемъ OD ⊥ MN; соединяемъ O и N; ON есть радіусъ иско
окружности; отсюда слѣдуетъ построеніе: изъ данной точки O
водимъ OD ⊥ AC, отъ точки D пресѣченія откладываемъ DN=
соединяемъ O и N и получаемъ ON, радіусъ искомой окружнос

122. Въ произвольномъ мѣстѣ стороны AC (см. черт.
откладываемъ $N_1D_1=\frac{MN}{2}$; потомъ изъ точки N_1 радіусомъ,
нымъ данному, пересѣкаемъ перпендикуляръ D_1O_1 въ точкѣ
черезъ точку O_1 проводимъ $OO_1 \parallel AC$ находимъ точку O цен
искомаго круга; радіусъ $ON=O_1N_1$, т. е. данному.

123. Черезъ точку A (данную) данной прямой MN провод
KZ ⊥ MN; откладываемъ даннымъ радіусомъ отъ точки A, A
AO_1, получимъ два искомыхъ центра.



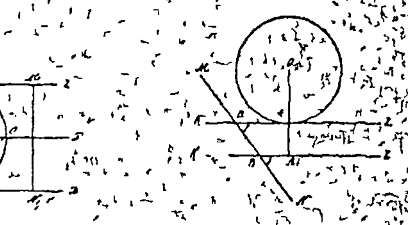
зад. 123.

зад 124

124. AO есть биссектриса даннаго угла BAC, значитъ центръ ...ой окружности лежитъ на пересѣченіи биссектрисы съ OM ⊥ ... C въ данной точкѣ M.

125. Этотъ вопросъ рѣшается въ теоріи.

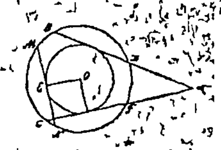
126. Центръ искомой окружности лежитъ на линіи EF ∥ CD, проходящей по серединѣ между данными KZ и CD, и, кромѣ того, въ разстояніи отъ данной точки A_1 равномъ радіусу OM; итакъ, чтобы найти искомый центръ, надо провести $M_1N_1 \perp CD$, черезъ середину M_1N_1, т. е. точку O_1 провести EF ∥ KZ и изъ точки A радіусомъ, равнымъ O_1M_1 пересѣчь линію EF. O есть центръ искомой окружности, т. к. OA=OM=ON.



Зад 126   Зад 127.

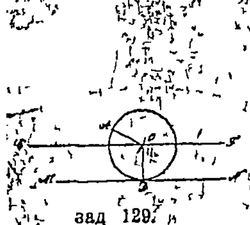
127. Въ произвольной точкѣ B_1 данной прямой MN проводимъ линію K_1Z_1 подъ даннымъ угломъ Z_1B_1N къ данной прямой MN; изъ центра O данной окружности опускаемъ $OA_1 \perp K_1Z_1$ и черезъ точку пересѣченія A проводимъ KZ ∥ K_1Z_1; KZ есть искомая касательная.

128. Строимъ гдѣ-нибудь въ данномъ кругѣ (на черт. большемъ) хорду MN данной длины, проводимъ OE ⊥ MN и радіусомъ OE описываемъ окружность; потомъ изъ данной точки A проводимъ двѣ касательныя AB и AC къ этой окружности, AB и AC—искомыя сѣкущія, т. к. BD и CF равны MN, какъ хорды равно-удаленныя отъ центра); обозначивъ длину данной хорды черезъ «a», а даннаго радіуса (данной окружности) черезъ «r»; въ случаѣ, если a<2r (данная хорда меньше діаметра) имѣемъ, какъ показали, два рѣшенія; если a=2r (хорда равна діаметру) одно рѣшеніе, если же a>2r, то ни одного рѣшенія, т. к. хорда никогда не можетъ быть больше діаметра.



Зад 128

129. Искомый центръ O лежитъ на линіи EE || MN (дан-
ной и проведенной въ разстояніи OD, равномъ данному радіусу
MN и, кромѣ того, на пересѣченіи съ дугой, проведенной изъ дан-
ной точки A даннымъ радіусомъ.

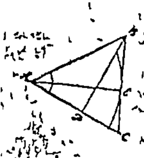


зад 129.

зад 130

130. Строимъ прямоугольный △, одинъ катетъ котораго ра-
венъ радіусу даннаго круга OD, а другой равенъ длинѣ касатель-
ной DE; гипотенуза этого △-ка «OE» будетъ служить радіусомъ
окружности, геометрическаго мѣста точекъ, изъ которыхъ касатель-
ныя къ данной окружности равны данной длинѣ DE; на пересѣче-
ніи этой окружности съ данной прямой AB находимъ двѣ точки E
и F искомыя (два рѣшенія), два рѣшенія будутъ въ томъ слу-
когда OE>OK (перпендик. къ AB); одно рѣшеніе когда OE=
и ни одного, когда OE<OK, такъ какъ въ этомъ не будетъ
сѣченій E и F.

131. Сначала строимъ △ABD, въ которомъ данъ ∠A и
тетъ BD, т. е. высота искомаго △ABC; чтобы найти искомый
до изъ точки A радіусомъ, равнымъ другой высотѣ AE прове
окружность, и изъ точки B къ ней касательную BC.

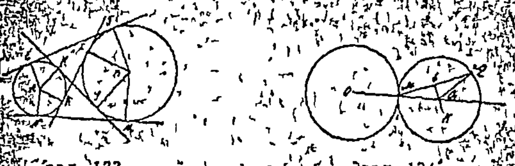


зад. 131

зад 132

132. Строимъ въ произвольныхъ мѣстахъ данныхъ окруж-
стей хорды данной длины KZ и K_1Z_1; находимъ ихъ разстоя-
отъ центровъ; это будетъ соотвѣтственно OE и O_1E_1 и радіуса-
равными этимъ перпендикулярамъ, описываемъ двѣ концентриче-
окружности, къ которымъ потомъ проводимъ общую касательн
AB, которая и будетъ искомой сѣкущей; доказать легко.

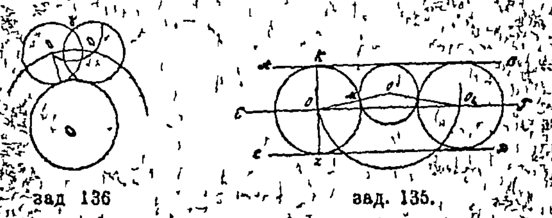
133. Изъ данныхъ точекъ A и B описываемъ окружности радiусами, равными соотвѣтственнымъ перпендикулярамъ изъ этихъ точекъ на искомую прямую; потомъ къ этимъ окружностямъ проводимъ 4 общихъ касательныхъ, которыя будутъ искомыми прямыми.



зад. 133. зад. 134.

134. Черезъ центръ данной окружности O и черезъ данную точку касанія M проводимъ прямую, на которой долженъ лежать центръ искомой окружности, кромѣ того соединяемъ двѣ данныя точки A и M и изъ середины прямой AM возстанавливаемъ EK ⊥ AM; въ пересѣченіи съ OO_1 находимъ искомый центръ O_1; замѣтимъ что $O_1A = O_1M$.

135. Радiусъ искомой окружности равенъ половинѣ разстоянія между AB и CD, т. е. радiусъ равенъ $\frac{KZ}{2} = O_1Z$; центръ, слѣд., лежитъ на средней линіи EF; чтобы найти его, надо изъ центра данной окружности O провести дугу радiусомъ, равнымъ суммѣ радiусовъ данной и искомой окружности, $(OO_1 = OM + O_1M)$, и въ пересѣченіи со средней линіей EF найдемъ два искомыхъ центра.



зад 136 зад. 135.

136. Пусть O будетъ центръ данной окружности, r — ея радiусъ, A — данная точка и r′ — радiусъ искомой окружности. Требуется опредѣлить центръ O′ этой послѣдней. Могутъ быть три главныхъ случая: точка A можетъ быть внѣ круга r, на окружности r, или въ кругѣ r. Всѣ эти 3 случая соотвѣтственно отвѣчаютъ тому условію, что $OA > r$, $OA = r$, $OA < r$, и каждый изъ нихъ подраздѣляется, въ свою очередь, на 3 другихъ, какъ показываетъ слѣдующая таблица:

1-й случай: $OA>r$, и 1° $r'<r$, 2° $r'=r$, 3° $r'>r$.
2-й случай: $OA=r$, и 1° $r'<r$, 2° $r'=r$, 3° $r'>r$.
3-й случай: $OA<r$, и 1° $r'<r$, 2° $r'=r$, 3° $r'>r$.

1-й случай: $OA>r$ и 1° $r'<r$. Такъ какъ точка A внѣ... то окружность r' не можетъ приходиться внутри окружнос... Сверхъ того, окружность r не можетъ быть внутренней по от... нію къ окружности r', вслѣдствіе того, что $r>r'$; поэтому обѣ ...ружности будутъ касаться извнѣ. Изъ точки O, какъ изъ це... радіусомъ $r+r'$ опишемъ окружность; центръ касательнаго ... долженъ находиться на этой окружности; но онъ долженъ быть ...же на разстояніи r' отъ точки A. Поэтому, если изъ точки A ...шемъ радіусомъ r' другую окружность, которая пересѣчетъ ...го получатся вообще двѣ точки O' и O'', которыя могутъ быть ...ты за центры круговъ, отвѣчающихъ заданію.

Разстояніе центровъ обѣихъ вспомогательныхъ окружно... $r+r'$ и r' есть OA, сумма ихъ радіусовъ $r+2r'$, ихъ разность... Но такъ какъ предполагалось, что $OA>r$, то для этого ...чая получатся, стало быть, два рѣшенія или только одно или ни одного, смотря по тому, будетъ ли

$$OA<r+2r' \text{ или } OA=r+2r' \text{ или } OA>r+2r'.$$

1-й случай: $OA>r$ и 2° $r'=r$. Такъ какъ точка A внѣ окр...ности, а радіусы r и r' равны, то обѣ окружности не могутъ б... одна внутри другой; слѣд., онѣ будутъ касательными извнѣ, ра...усомъ одной изъ вспомогательныхъ окружностей будетъ $r+r$... другой r; сумма же ихъ радіусовъ составитъ 3r. Построеніе, т...дественное съ предшествующимъ, приводитъ тоже къ двумъ р...ніямъ, къ одному или ни къ одному, смотря по тому, будетъ л...

$$OA<3r, \text{ или } OA=3r \text{ или } OA>3r.$$

1-й случай: $OA>r$ и 3° $r'>r$. Окружности r и r' могутъ ...нимать положенія, сходныя съ тѣми, какія онѣ занимали въ ...ихъ предшествующихъ случаяхъ. Стало быть и тутъ получатся ... рѣшенія, одно или ни одного, смотря по тому, будетъ-ли

$$OA<r+2r', \text{ или } OA=r+2r', \text{ или } OA>r+2r'.$$

Но такъ какъ $r'>r$, то окружность r' можетъ вдобавокъ о...кать окружность r. Тогда разстояніе центровъ окружностей ... будетъ $r'-r$. Поэтому описываютъ окружность изъ точки O, и...

къ центра (1-й случай, 1°), радіусомъ r'—r, изъ точки A, какъ изъ центра, радіусомъ r описываютъ другую окружность, которая пересѣчетъ первую въ двухъ точкахъ O' и O''. Эти точки будутъ центрами двухъ окружностей r', касающихъ окружность. Разстояніе центровъ обѣихъ вспомогательныхъ окружностей есть OA, а сумма ихъ радіусовъ будетъ: r'+r'—r=2r'—r, а ихъ разность r'—(r'—r)=r.

Имѣемъ OA>r. Поэтому будутъ двѣ окружности, объемлющія окружность r или одна, или ни одной, смотря по тому, будетъ ли

$$OA<2r'-r, \text{ или } OA=2r'-r, \text{ или } OA>2r'-r.$$

Такимъ образомъ, задача допускаетъ въ настоящемъ случаѣ 4, 3, 2, 1 или ни одного рѣшенія; 4 рѣшенія будутъ въ томъ случаѣ, когда OA<2r'—r, ибо изъ этого выраженія и подавно получается еще OA<r+2r'; 3 рѣшенія, когда OA=2r'—r, ибо изъ этого же равенства получается еще OA<r+2r'. На томъ же основаніи получаются два рѣшенія, когда OA заключается между 2r'—r и 2r'+r, одно рѣшеніе, когда OA=r+2r', и ни одного, когда OA>2r'—r.

2-й случай: OA=r и r'<r, или r'=r, или r'>r. Такъ какъ точка A приходится и на окружности r и на окружности r', то она будетъ точкою ихъ касанія; слѣд., искомый центръ O' находится на OA и по обѣ стороны точки A въ разстояніи равномъ r'.

Поэтому берутъ, во-первыхъ, на продолженіи OA длину AO'=r', изъ точки O', какъ изъ центра,—радіусомъ r' описываютъ окружность, которая во всѣхъ 3-хъ случаяхъ будетъ внѣ окружности r. Во вторыхъ, по направленію AO откладываютъ длину AO''=r', и изъ точки O'', какъ изъ центра, радіусомъ r описываютъ окружность, которая будетъ облечена окружносью r, если r'<r, или же заключитъ окружность r, если r'>r. Но если r'=r, то обѣ окружности совпадаютъ, и не получается никакого рѣшенія.

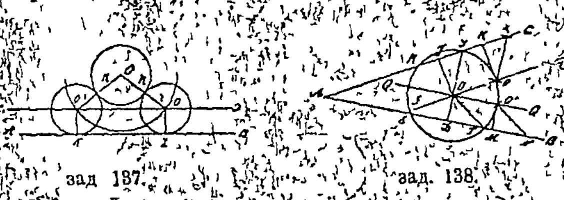
3-й случай: OA<r и 1° r'<r. Такъ какъ точка A находится въ кругѣ r, то окружность r' облекается окружность r. Растояніе центровъ окружностей r и r' будетъ r—r'. Изъ точки O, какъ изъ центра радіусомъ r—r' опишемъ окружность, а

изъ точки A, какъ изъ центра, радіусомъ r' опишемъ другую окружность, которая пересѣчетъ первую въ ... и O''. Эти точки будутъ центрами обѣихъ окружностей r', облеченныхъ окружностью ... Разстояніе обѣихъ вспомогательныхъ окружностей есть OA, сумма ихъ радіусовъ будетъ $r'-r'+r=r$, а ихъ разность $(r-r')-r'=r-2r'$, или $r'-(r-r')=2r'-r$, смотря по тому, будетъ ли $r'<$ или $>r-r'$. Но $OA<r$. Поэтому получатся два рѣшенія, одно рѣшеніе, или же не будетъ ни одного, смотря по тому, будетъ ли

$OA>r-2r'$, или $2r'-r$, или $OA=r-2r'$ или $2r'-r$; или $OA<r-2r'$ или $2r'-r$.

3-й случай: $OA<r$ и **2°** $r=r'$; **3-й случай:** $OA<r$ и **3°** $r'>r$. Задача, очевидно, невозможна въ обоихъ этихъ случаяхъ: если точка A находится внутри окружности r, то послѣдняя должна обнимать окружность r', поэтому нужно, чтобы r' было $<r$, а этого здѣсь нѣтъ.

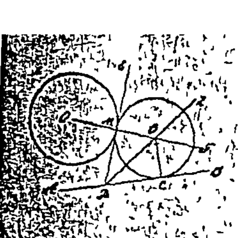
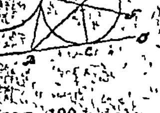
137. Проводимъ CD || AB на разстояніи даннаго радіуса r и изъ даннаго центра O проводимъ дугу радіусомъ $R+r=OO'=OO''$ и пересѣкаемъ прямую CD въ двухъ точкахъ O' и O'' искомыхъ центрахъ.



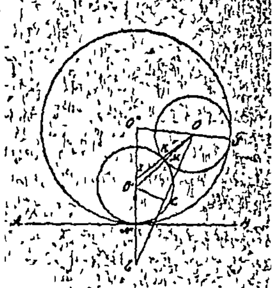
зад 137. зад. 138.

138. Въ произвольныхъ мѣстахъ на сторонахъ BA и CA даннаго ∠ строимъ прямоугольные △-ки, KZO' и NO''M, катеты которыхъ KZ и MN равны половинамъ данныхъ хордъ, а гипотенузы O'Z и O''N равны данному радіусу; искомый центръ долженъ лежать на линіяхъ GP и QQ_1 параллельныхъ соотвѣтственно сторонамъ AC и AB, т. е. это будетъ пресѣченіе ихъ O; даннымъ радіусомъ $O'Z=O''N$ описываемъ изъ точки O окружность; RS и EM = даннымъ хордамъ.

139. Пусть O центръ данной окружности, O' — искомой, AB — данная прямая. Соединимъ O и M (данную точку касанія), получимъ линію OE, на которой долженъ лежать искомый центръ, затѣмъ проводимъ общую касательную $ED \perp OE$ въ точкѣ M, и $\angle ODB$ дѣлимъ пополамъ, т. е. проводимъ биссектрису DZ, которая должна пройти черезъ точку O', т. к. $O'M = O'C$ = искомому радіусу. То искомый центръ O' находится на пересѣченіи линій OE и DZ.

Зад. 139.



Зад. 140.

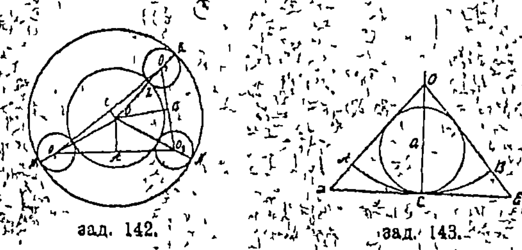
140. Въ данной точкѣ N строимъ перпендикуляръ $NE = MO$, радіусу данной окружности; тогда искомый центръ лежитъ на перпендикулярѣ CO' къ срединѣ C линіи OE, т. к. $O'O = O'E$ = суммѣ радіусовъ данной и искомой окружности; съ другой стороны, отложивъ $NZ \perp AB$ и равное MO, соединимъ Z и O и возставимъ $\perp$ къ ZO въ серединѣ K, получимъ другой центръ O'' на пресѣченіи съ $EO' \perp AB$; 2 рѣшенія: 1-е — внѣшнее касаніе, 2-е — внутреннее.

141. Пусть искомая окружность O_3 касается къ окружности O_1 въ данной на ней точкѣ M и къ окружности O_2. Такъ какъ центры касательныхъ окружностей и точка касанія лежатъ на одной прямой, то искомый центръ лежитъ въ пересѣченіи прямыхъ O_1M и O_2B. Прямая O_1M извѣстна и потому задача приводится къ опредѣленію положенія точки B. Проведемъ прямую черезъ точки M и B и отысканіе точки B сводимъ на опредѣленіе точки C. Выведемъ слѣдствія изъ сохранившагося чертежа: $\angle O_1MA = \angle O_3MB$, какъ вертикальные, $\angle O_3MB = \angle MBO_3$, ибо $\triangle MO_3B$ — равнобедренный; $\angle MBO_3 =$

$\angle O_3BC$ и $\angle O_2BC = O_2CB$, ибо $\triangle O_2BC$ — равнобедренный; изъ этихъ равенствъ слѣдуетъ, что $\angle O_1MA = \angle O_2CB$ и, слѣд., $O_1M \parallel$ ... Послѣднее слѣдствіе указываетъ, что для рѣшенія задачи надо провести $O_2C \parallel O_1M$, точку M соединить съ C_1 полученную точку соединить съ O_2; прямыя O_1M и O_2B опредѣлятъ точку O_3. Чтобы доказать, что окружность проведенная изъ центра O_3 радіусомъ ... будетъ искомая, докажемъ, что $O_3M = O_3B$. Изъ чертежа видно $\angle O_1MA = \angle O_3MB$, $\angle O_2BC = \angle O_3BM$; $\angle O_1MA = \angle O_2CB$ и $\angle O_2$... $= O_2BC$. Изъ этихъ равенствъ выходитъ, что $\angle O_3MB = \angle O_3$... потому $MO_3 = BO_3$. Это значитъ, что окружность радіуса O_3M пройдетъ черезъ точки M и B и коснется окружностей O_1 и O_2.

Продолживъ O_2C и соединивъ полученную точку D съ M, въ пересѣченіи окружности O_2 и прямой DM находимъ новую точку ... Если продолжимъ прямую O_2Z до пересѣченія въ точкѣ Q съ прямой O_1M, то Q будетъ центръ новой окружности, которая къ окружности O_1 имѣетъ внутреннее касаніе, а къ окружности O_2 касается въ точкѣ Z. Задача имѣетъ два рѣшенія соотвѣтственно внутреннему и внѣшнему касанію окружностей, и всегда возможна. Когда точка M есть точка касанія общей касательной къ кругамъ O_1 и O_2, радіусы O_1M и O_2B выходятъ параллельными; тогда получается только одно рѣшеніе.

142. O_1, O_2, O_3, суть центры трехъ данныхъ окружностей, O центръ искомой; $OO_1 = OO_2 = OO_3$ и поэтому искомый центръ находится на пересѣченіи перпендикуляровъ OA, OB, OC къ серединамъ A, B, C прямыхъ O_1O_2, O_2O_3, O_3O_1; это случай внѣшняго касанія; если же мы изъ найденнаго центра O опишемъ окружность радіусомъ $OO_3 + O_3K = OZ + ZK = OZ + 2O_3Z$, то получимъ случай внутренняго касанія.

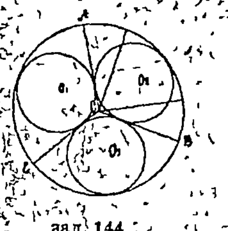


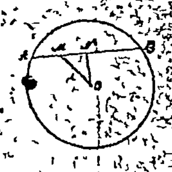
зад. 142. зад. 143.

143. Раздѣлимъ дугу AB пополамъ въ точкѣ C и проведемъ касательную въ этой точкѣ DE, продолжимъ OA и OB до пересѣченія

ія, тогда задача приводится къ вписыванію окружности въ E, что уже извѣстно.

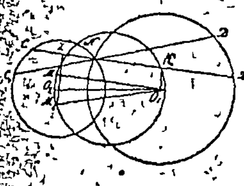
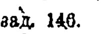
144. Проводимъ три радиуса OA, OB, OC образующіе три равныхъ сектора съ углами при точкѣ по $\frac{4}{3}d$; теперь задача сводится къ вписыванію въ каждый секторъ окружности; см. **143**.

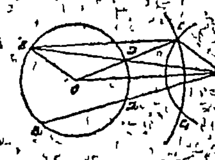

зад. 144


зад. 145.

145. Черезъ точку M проходитъ хорда AB; согласно условію $MB - MA = a$; преобразуемъ это равенство: $(NB + MN) - (NA - NM) = NB + MN - NA + NM = a$, а т. к. $NB = NA$, то $2MN = a$, откуда имѣемъ $MN = \frac{a}{2}$; итакъ, $\triangle MNO$ легко построить по катету $MN = \frac{a}{2}$ и по гипотенузѣ MO; построивши его, продолжимъ MN въ обѣ стороны до пересѣченія съ окружностью, и получимъ искомую хорду AB.

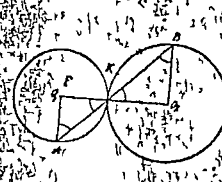
146. Изъ данныхъ центровъ O_1 и O_2 опускаемъ перпендикуляры O_1K и O_2Z на искомую сѣкущую CD, затѣмъ изъ O_1 проводимъ $O_1M \parallel CD$; тогда получимъ прямоугольный $\triangle O_1O_2M$, въ которомъ гипотенуза $= O_1O_2$, а катетъ $O_1M = KZ = \frac{CD}{2}$ (половинѣ данной длины); этотъ $\triangle O_1O_2M$ легко построить; надо только изъ середины линіи O_1O_2 описать окружность радіусомъ $\frac{O_1O_2}{2}$; но тогда получатся два $\triangle$-ка O_1O_2M и $O_1O_2M_1$; теперь черезъ данную точку N проведемъ CD и $C_1D_1 \parallel O_1M$ и O_1M_1, получимъ два искомыхъ положенія сѣкущей, удовлетворяющія условію.



зад. 146.


зад. 147.

147. Дана точка А; провести сѣкущую АВ такъ, чтобы AD=DB; соединимъ О съ А; изъ О радіусомъ 2OD проведемъ дугу, пересѣчемъ ее дугою, проведенною изъ точки А радіусомъ OD; въ пересѣченіи найдемъ точку С; черезъ С проведемъ CB ∥ AO и найдемъ точку В; соединимъ теперь В съ А, получимъ искомую хорду АВ, въ которой AD=DB; доказательство вытекаетъ изъ того, что фигура ABCO есть параллелограмъ. Задача возможна только тогда, когда $AO < AC + CO$ или когда $AO < 3OD$; въ первомъ случаѣ, когда $AO < 3OD$, имѣемъ два рѣшенія: АВ и AB_1 соотвѣтственно двумъ пресѣченіямъ дугъ С и C_1; во второмъ случаѣ, когда $AO = 3OD$ имѣемъ только одно рѣшеніе, т. е. искомая сѣкущая проходитъ черезъ центръ.

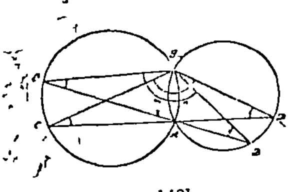
148. Требуется доказать, что KB=KA; △-ки BO_2K и KAO_1—равнобедренные, и поэтому $\angle KBO_2 = \angle O_2KB = \angle O_1KA$ (KK вертикальные) $= KAO_1$, слѣд., и $\angle BO_2K = \angle AO_1K$; а потому AK=KB.



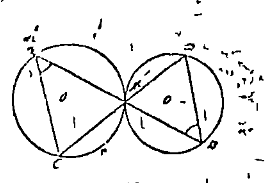
зад. 148. зад. 148а.

148а. AB=CD по условію и обѣ проходятъ черезъ данную внутри круга точку M; доказать, что MB=MC и MA=MD; проведимъ OM, потомъ $OE \perp AB$, $OF \perp CD$; тогда OE=OF, кк. разстоянія отъ центра равныхъ хордъ и EB=FC, (1) EA=FD, (2) $\triangle OME = \triangle OMF$ (общая гипотенуза OM и катеты OE и OF равны); отсюда имѣемъ: ME=MF; прибавляя это равенство къ (1) и вычитая отъ второго почленно, получимъ искомыя равенства: EB+ME=FC+MF или MB=MC; EA−ME=FD−MF или AM=MD.

148b. Доказать, что $\angle CBD = \angle C_1BD_1$; изъ △-овъ CBD и C_1BD_1 имѣемъ: $\angle CBD = 2d - (\angle BDC + \angle DCB)$; $\angle C_1BD_1 = 2d - (\angle BD_1C_1 + \angle D_1C_1B)$. Но т. к. $\angle BDC = \angle BD_1C_1$, $\angle DCB = \angle D_1C_1B$ (какъ опирающіеся на однѣ и тѣ же дуги BmA и BnA, то отсюда слѣдуетъ, что $\angle BDC + DCB = \angle BD_1C_1 + \angle D_1C_1B_1$ и $\angle CBD = \angle C_1BD_1$.



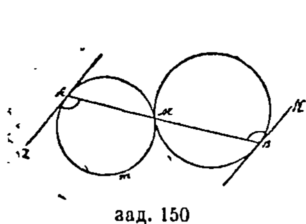
зад 148b.



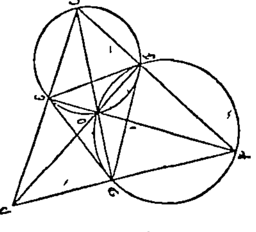
зад. 149.

149. Доказать, что $AC \parallel BD$; на основанiи № 148 $\breve{CnM}=\breve{MmD}$; и $\angle CAM=\angle DBM$; т. к. накрестъ-лежащiе углы (внутренние) равны, то $AC \parallel BD$.

150. На основанiи задачи № 148, $\breve{BnM}=\breve{MnA}$, и $\angle ZAB=KBA$, какъ углы одного измѣренiя; а если внутреннiе накрестъ-лежащие углы равны, то $AZ \parallel BK$.



зад. 150

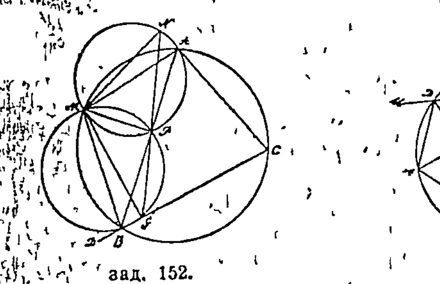


зад. 151.

151. Въ треугольникѣ ABE проведены высоты AE, BF и CD, основания которыхъ D,E F соединены прямыми линiями. Такъ какъ $\angle OEC=\angle OFC=d$, то $\angle OEC+\angle OFC=2d$, почему $\angle EOF+ECF=2d(4-2)-2d=2d$, слѣдовательно, около четыреугольника FOEC можно описать окружность. Точно также можно описать окружность около четыреугольника ADOF. Мы видимъ, что $\angle OCE=\angle OFE$ и $\angle OFD=\angle OAD$, такъ какъ они опираются на однѣ и тѣ же дуги, кромѣ того $\angle OAD$ и $\angle OCE$ равны, такъ какъ стороны ихъ взаимно перпендикулярны, почему $\angle OFD=OFE$, т. е. OF будетъ биссектриссой $\angle DFE$.

152. Предположимъ, что около $\triangle ABC$ описана окружность и изъ произвольной ея точки M опущены перпендикуляры MN, MP и MG. Требуется доказать, что MPG прямая. Такъ какъ въ $\square APMN$ $\angle MNA+\angle APM=2d$, то около него можно описать окружность (см. геом. Кис. § 107,2°). Около $\square$ BMPG также можно описать

окружность, т. к. $\angle BGM = \angle BPM = d$. Проведя прямыя MA, NP и PG, замѣтимъ $\angle MBD + \angle MBC = 2d$ и $\angle MBG = \angle MAN$. Такъ какъ треугольники BMG и AMN прямоугольны, то, слѣдовательно, $\angle BMG = \angle AMN$. Но $\angle AMN = \angle APN$ и $\angle BMG = \angle BPG$, какъ опирающіеся на одну и ту же дугу (см. Кис. геом. § 151,1°), откуда $\angle APN = \angle BPG$, и слѣдовательно NPG прямая.



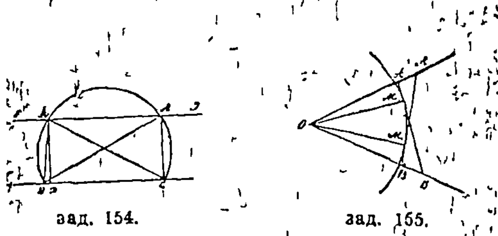
зад. 152.



зад. 153

153. Для того, чтобы найти на безконечной прямой MN такую точку D, изъ которой отрѣзокъ AB былъ бы виденъ подъ угломъ a, строимъ на AB дугу, вмѣщающую уголъ a (см. геом. Кис. § 165). Дуга эта пересѣчетъ прямую MN въ двухъ точкахъ D и D_1, которыя и будутъ искомыми точками, такъ какъ $\angle ADB = \angle AD'B = a$.

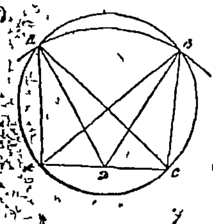
154. На произвольной прямой откладываемъ часть BC, равную данному основанію, а затѣмъ на BC описываемъ дугу, вмѣщающую данный $\angle A$. Но намъ извѣстно, что всякая точка этой дуги удовлетворяетъ вопросу, т. е. треугольниковъ по данному основанію и данному углу, ему противолежащему, можно построить безчисленное множество, потому что всякая точка этой дуги, соединенная съ точками B и C, даетъ требуемый треугольникъ, въ которомъ $\angle BAC$, противолежащій основанію BC, равенъ данному углу, какъ опирающійся на дугу, вмѣщающую данный уголъ. Такъ какъ вопросъ ограниченъ еще тѣмъ условіемъ, что искомый треугольникъ долженъ имѣть высоту, равную данной высотѣ, то мы должны на разстояніи AD, равномъ данной высотѣ, отъ прямой BC провести линіи EF ‖ BC, которая проходя чрезъ окружность, какъ сѣкущая пересѣчетъ ее въ двухъ точкахъ A и A', которыя соединивъ съ точками B и C, получимъ 2 треугольника ABC и A'BC, удовлетворяющіе требуемымъ условіямъ; слѣдовательно они есть искомые.



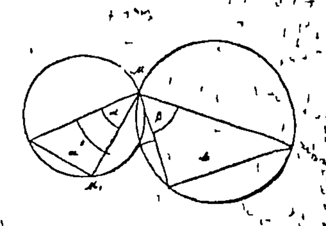
зад. 154. зад. 155.

155. Положимъ, что данъ секторъ AOB, въ которомъ требует-
провести касательную AB данной длины. Задача сводится къ
шенію зад. 154, такъ какъ здѣсь требуется построить $\triangle AOB$,
которомъ дано основаніе AB, высота OM и уголъ при вер-
нѣ AOB'.

156. Чрезъ точки A и C прямой AC проводимъ окружность,
щающую данный уголъ ABC и изъ D средины линіи AC радіу-
мъ BD, равнымъ медіанѣ, описываемъ окружность, которая пере-
четъ первую окружность въ двухъ точкахъ. Соединяя эти двѣ
жки съ A и C, получимъ два искомые треугольника ABC и AB'C.



зад. 156.

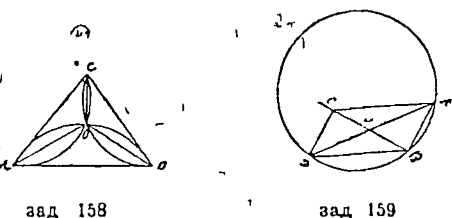


зад. 157.

157. На прямой a строимъ дугу, вмѣщающую уголъ α, и
а прямой b дугу, вмѣщающую уголъ β. Точки M и M' пересѣче-
ія этихъ двухъ дугъ будутъ искомыми. Если окружности пересѣ-
утся, то будутъ 2 рѣшенія; если коснутся—одно, и если не кос-
утся и не пересѣкутся, то ни одного.

158. Предположимъ, что задача рѣшена. Пусть O будетъ ис-
омая точка. $\angle AOB + \angle AOC + \angle BOC = 4d$, а такъ какъ $\angle AOB$,
$\angle AOC$ и $\angle BOC$ должны быть равны, то отсюда слѣдуетъ, что
каждый изъ этихъ угловъ долженъ равняться $4/3$ прямого угла. По-
тому, достаточно описать на каждой изъ сторонъ треугольника
сегменты, вмѣщающіе $4/3$ прямого угла. Задача будетъ невозможна,
если одинъ изъ угловъ треугольника больше $4/3$ прямого угла, ибо

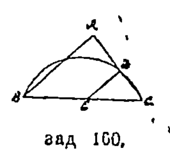
тогда всѣ 3 сегмента пересѣкутся въ точкѣ O′ внѣ △ABC, а од
изъ угловъ оба вмѣстить остальныхъ.



зад 158 зад 159

159. Предположимъ, что искомый △ будетъ ABC, въ не
даны ∠CAB, высота AE и медiана AF Продолживъ медiану
равное разстоянie до точки D и соединивъ полученную точку
съ концами основанiя C и B, получимъ параллелограммъ AB
Въ △ABD сторона AD=2AF, а ∠ABD=2d—∠CAB. На
строимъ окружность, вмѣщающую ∠ABD, а изъ A описыва
дугу радiусомъ, равнымъ высотѣ AE, въ которой чрезъ точку
проводимъ касательную FB, и, отложивъ CF=FB, получимъ ис
мый △ABC Въ самомъ дѣлѣ AF= данной медiанѣ и AE= д
ной высотѣ, а ∠CAB=данному углу

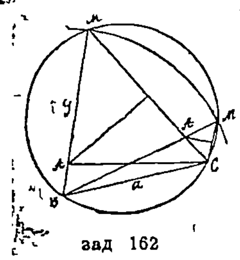
160. Положимъ, что △ABC, въ которомъ дано основанie,
∠ABC и ∠BDC построенъ. Мы замѣчаемъ, что задача была
рѣшена, если бы было опредѣлено положенie точки D. Соедин
E. средину BC съ D, видимъ, что DE ∥ AB, кромѣ того точка
лежитъ въ пересѣченiи линiи DE съ окружностью, проведен
чрезъ 3 точки BDC, т. е. вмѣщающей данный ∠BDE Изъ эт
вытекаетъ. что для того, чтобы построить △ по даннымъ 3
элементамъ, должно построить ∠ABC, равный данному, чрезъ т
ку E средину основанiя BC проводимъ линiю DE ∥ AB и на
строимъ окружность, вмѣщающую данный уголъ BDC. Пересѣче
этой окружности съ прямою ED соединяемъ съ точкою C и п
должаемъ ее до пересѣченiя со стороны AB∠ABC Полученный
ABC будетъ искомый.

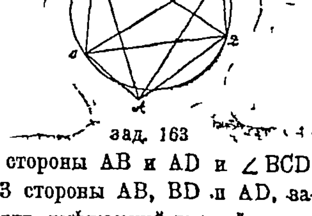


зад 160. зад 161

161. *Въ параллелограммѣ ABCD даны. діагональ AC, діаг-ль* BD и ∠BAD. △ABD, въ которомъ даны основанія BD, мъ при вершинѣ BAD и медiана AO ($=\frac{1}{2}$AC), проведенная къ ованію, мы умѣемъ построить (см. рѣш зад. 156). Проведя за-ѣ BC ∥ AD и DC ∥ AB, получимъ искомый параллелограммъ.

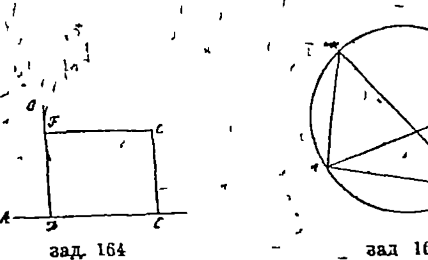
162 Пусть △ABC будетъ искомый. Чтобы принять во вни-ніе данную сумму боковыхъ сторонъ, продолжимъ BA и отложимъ I=S; проведя MC, получимъ вспомогательный △BMC. Если мы строимъ этотъ △, то затѣмъ легко построить и △ABC. Постро-е △BMC сводится къ нахожденію точки M. Замѣтивъ, что △ IC равнобедренный (AM=AC) и слѣдов., ∠M=$\frac{1}{2}$∠A (т. к. M+∠C=∠A), мы видимъ, что M должна быть удовлетворяема условіямъ: 1) она удалена отъ B на разстояніе S, 2) изъ нея ная конечная прямая BC видна подъ угломъ равнымъ $\frac{1}{2}$∠A. бросивъ 2-е условіе, мы получимъ безчисленное множество то-къ M, лежащихъ на окружности, описанной изъ B радіусомъ нымъ S, Отбросивъ 1-е условіе, мы получимъ также безчислен-множество точекъ M, лежащихъ на дугѣ сегмента, построеннаго BC и вмѣщающаго ∠=$\frac{1}{2}$∠A Такимъ образомъ нахожденіе ки M сводится къ построенію двухъ геометрическихъ мѣстъ, изъ орыхъ каждое мы построить умѣемъ. Задача окажется невозмож-, если эти геометрическія мѣста не будутъ имѣть общихъ то-къ; задача будетъ имѣть одно или два рѣшенія, смотря по тому, аются ли или же пересѣкаются эти мѣста.


зад 162

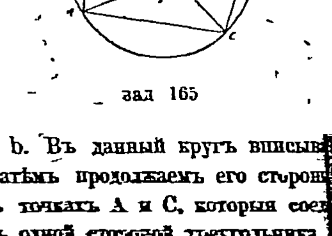

зад. 163

163. Даны діагонали AC и BD, стороны AB и AD и ∠BCD. оимъ △ABD, въ которомъ даны 3 стороны AB, BD и AD, за-ъ на діагонали BD строимъ сегментъ, вмѣщающій данный уголъ D, и изъ A радіусомъ, равнымъ діагонали AC, описываемъ дугу. ка C пересѣченія этой дуги съ сегментомъ и будетъ четвертой шиной искомаго четыреугольника ABCD.

164. Предположимъ, что задача рѣшена, т. е. что линія будетъ прямая, при чемъ DE=данной длинѣ. Проведемъ CF тогда CF=DE и ⊥BD. почему окружность, описанная изъ C радіусомъ, равнымъ CF=DE, будетъ касательна къ BD. От[...] слѣдуетъ построеніе, а именно: изъ точки C радіусомъ, рав[...] данной длинѣ, описываемъ дугу, а изъ точки B къ ней каса[...]ную, на которую изъ точки A опускаемъ перпендикуляръ AE [...]мая AE будетъ искомая.



зад. 164



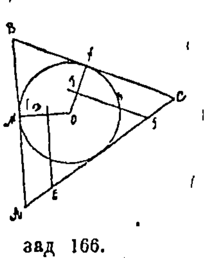
зад 165

165. Даны 2 угла a и b. Въ данный кругъ вписыв[...] ∠AMC, равный данному ∠a, затѣмъ продолжаемъ его сторон[...] пересѣченія съ окружностью въ точкахъ A и C, которыя сое[...]емъ прямою. Прямая AC будетъ одной стороной треугольника [...] точкѣ C строимъ ∠ACB, равный другому данному ∠b, и сое[...]емъ, наконецъ, B съ A. △ABC и будетъ искомый.

166. Данъ ∠a и ∠b. Проводимъ къ данному кругу каса[...]ную AC и на ней при какой нибудь точкѣ E строимъ ∠[...] равный данному ∠a, опускаемъ на сторону DE перпендику[...] CD, продолжаемъ его до пересѣченія съ окружностью въ то[...] наконецъ, чрезъ точку M. проводимъ касательную AB. Т.[...] перпендикулярна къ MO и ED тоже перпендикулярна къ M[...] AB и ED параллельны, почему ∠BAC=∠DEG Точно так[...] строимъ ∠ACB, равный другому данному ∠b Продолжив[...]роны AB и BC до пересѣченія въ точкѣ B, найдемъ ис[...] △ABC.

167. Чтобы рѣшить эту задачу, вписываемъ въ окру[...] даннаго радіуса OB=R ∠BAC, равный данному, и соединяе[...] и C прямою, затѣмъ гдѣ нибудь на BC возстановляемъ пер[...]куляръ CF=h_a и проводимъ FM || BC Точки пересѣченія

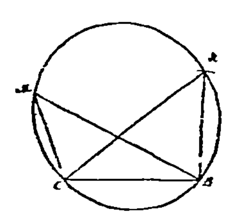
предѣлятъ третьи вершины A и A′ двухъ равныхъ треугольниковъ ABC и A′BC.

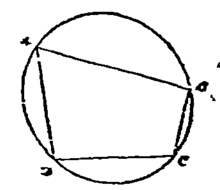




зад 166. зад 167.

168. Пусть данъ $\angle BAC$ и $AB+BC=S$. Для рѣшенія этой задачи впишемъ въ данный кругъ уголъ BMC, равный данному углу. Хорда BC будетъ равна одной изъ сторонъ искомаго треугольника. Затѣмъ изъ B радіусомъ, равнымъ $S-BC$, описываемъ дугу, которая пересѣчетъ окружность въ точкѣ A. Точка A будетъ третьей вершиной искомаго треугольника ABC.

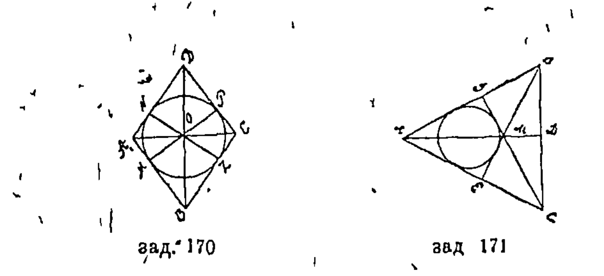




зад. 168 зад. 169.

169. Дана сторона AB и углы C и D. Такъ какъ во всякомъ вписанномъ четыреугольникѣ сумма противоположныхъ угловъ$=2d$, то $\angle A=2d-\angle C$ и $\angle B=2d-\angle D$, поэтому, чтобы вписать въ данный кругъ требуемый четыреугольникъ, проводимъ въ кругѣ хорду AB, равную данной, а затѣмъ на ней при точкахъ A и B строимъ углы, равные $2d-\angle C$ и $2d-\angle D$, пересѣченіе сторонъ которыхъ съ окружностью опредѣлитъ двѣ другія вершины C и D искомаго четыреугольника ABCD.

170. Такъ какъ въ каждомъ ромбѣ треугольники AOB, BOC, COD и AOD равны, то и высоты ихъ OZ, OM, ON и OP равны, почему окружность, вписанная радіусомъ $OZ=OM=ON=OP$, коснется всѣхъ сторонъ ромба



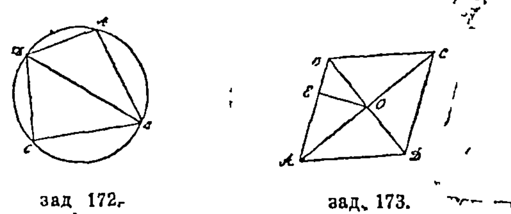
зад. 170 зад 171

171. Если въ данномъ равностороннемъ $\triangle ABC$ проведемъ 3 высоты AD, BE, CF, то онъ раздѣлится ими на 3 равные четыреугольника AFMC, BDMF и CEMD, т. к. въ нихъ стороны $AE = AF = BF = BD = DC = CE$, какъ половины равныхъ сторонъ, углы $\angle BAC = \angle ABC = \angle BCA$ и углы $\angle MFA = \angle MFB = \angle MDB = \angle MDC = \angle MEC = \angle MEA = d$. Такъ какъ въ равностороннемъ треугольникѣ высоты вмѣстѣ съ тѣмъ суть биссектрисами и медіанами, а мы знаемъ, что 3 медіаны треугольника пересѣкаются въ одной точкѣ, которая отсѣкаетъ отъ каждой медіаны третью часть, считая отъ соотвѣтствующей стороны, то $MF = MD = ME$. Мы видимъ, что въ четыреугольникѣ AFME сумма $AE + FM = AF + EM$, слѣдовательно можно въ него вписать окружность (см. геом. Кис. § 172, 2°). Точно также мы можемъ вписать окружность въ два остальные четыреугольника. Отсюда слѣдуетъ, что точки касанія этихъ окружностей съ прямыми AD, BE, CF находятся на равномъ разстояніи отъ центра M и потому окружности эти касаются въ этихъ точкахъ. Итакъ, чтобы рѣшить эту задачу, проводимъ 3 высоты и въ образовавшіеся 3 четыреугольника вписываемъ три равные круга, (см. геом. Кисел. 182,2°).

172. Даны стороны AB, BC и AD и діагональ DB. Положимъ, что задача рѣшена, т. е. что четыреугольникъ ABCD будетъ искомый. $\triangle ABD$, въ которомъ извѣстны 3 стороны, мы можемъ построить. Въ $\triangle BCD$ даны стороны DB и BC и $\angle C = 2d - A$ (см. Кис. геом. § 170, 1°), поэтому, чтобы построить $\triangle DBC$, мы должны на прямой DB построить сегментъ, вмѣщающій данны $\angle C$ (см. геом. Кис. § 165). Описавъ изъ точки B дугу радіусомъ, равнымъ BC, точку C пересѣченія этой дуги съ дугой сегмента соединяемъ съ точкой D. Полученный четыреугольникъ ABCD будетъ искомый.

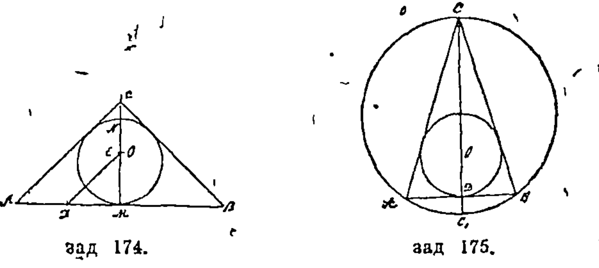
173. Діагонали BD и AC составляютъ биссектриссы угловъ ромба, стало быть, центръ вписаннаго круга находится въ точкѣ O пересѣченія этихъ діагоналей. Слѣдовательно, перпендикуляръ OE

АВ будетъ радіусомъ вписаннаго круга. Въ прямоугольномъ $\triangle$ ВО извѣстны гипотенуза АВ и соотвѣтственная высота ОЕ, поэтому можно построить этотъ треугольникъ, послѣ этого легко достроить ромбъ, ибо его полудіагонали будутъ извѣстны.



зад 172. зад. 173.

174 Черезъ какую-нибудь точку М данной окружности проводимъ діаметръ MN и къ нему касательную АВ Затѣмъ при какой нибудь точкѣ D строимъ $\angle$EDM=45°, на сторону DE опускаемъ изъ центра О перпендикуляръ OF, чрезъ точку F проводимъ касательную АС и при точкѣ С строимъ прямой $\angle$АСВ. Продолживъ сторону СВ этого угла до пересѣченія ея въ точкѣ В съ прямою АВ, получимъ $\triangle$АВС.

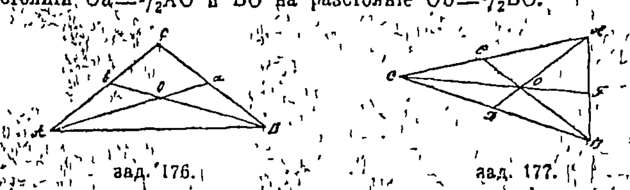


зад 174. зад 175.

175. Предположимъ, что задача рѣшена. Пусть АВС будетъ искомый треугольникъ. Разсматривая фигуру, видно, что для полученія $\triangle$АВС достаточно возставить въ срединѣ прямой АВ, равной данному основанію, перпендикуляръ DO=r, радіусу вписаннаго круга, описать этотъ кругъ и провести къ нему касательныя чрезъ точки А и В.

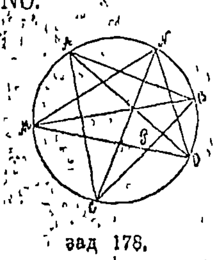
176. Положимъ, что искомый $\triangle$АВС построенъ и пусть О будетъ точка пересѣченія его двухъ данныхъ медіанъ Аа и Bb. Мы знаемъ, что точка пересѣченія 3 медіанъ треугольника находится на $^1/_3$ каждой изъ нихъ, считая отъ соотвѣтственной стороны, почему АО=$^2/_3$Аа и ВО=$^2/_3$Bb, слѣдовательно, мы можемъ постро-

ить $\triangle AOB$, зная 3 его стороны; направленіе сторонъ AC и BC опредѣлится точками b и a, которыя найдемъ, продоляживъ AO на разстоянія $Oa={}^1/_2AO$ и BO на разстояніе $Ob={}^1/_2BO$.


зад. 176. зад. 177.

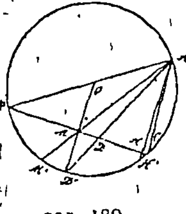
177. Предположимъ, что $\triangle ABC$ искомый и O точка пересѣченія его трехъ медіанъ AD, BE и CF. Въ треугольникѣ COB намъ извѣстны двѣ его стороны и медіана, проведенная къ третьей сторонѣ, а именно: $CO={}^2/_3CF$, $OB={}^2/_3BE$ и $OD={}^1/_3AD$; слѣдовательно мы можемъ построить этотъ треугольникъ (см. зад. 99) тогда опредѣлится сторона CB искомаго треугольника и направленіе медіаны AD, длина которой извѣстна. Соединяя конецъ ея A съ вершинами угловъ C и B, найдемъ искомый треугольникъ ABC.

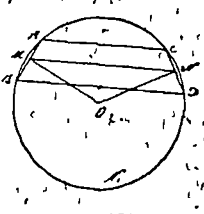
178. Предположимъ, что задача рѣшена, и что вписанъ въ окружность такой $\triangle MNO$, биссектриссы котораго AO, BM и CM при продолженіи встрѣчаютъ окружность въ данныхъ точкахъ A, B и C. Соединимъ точки A, B, C. Т. к. AO есть биссектрисса $\angle O$ и вслѣдствіе того $\angle O$ ею дѣлится пополамъ, а мы знаемъ, что равные вписанные углы опираются на равныя дуги, то дуга AM= =дугѣ AN. Точно также дуга OB=дугѣ BN и дуга MC=дугѣ CO. Разсмотримъ теперь углы APC и APB. $\angle APC$ измѣряется полусуммою AM+MC+BO, а $\angle APB$=полусуммѣ AN+NB+CO, слѣдовательно, $\angle APC=\angle APB$, т. е. $AO\perp BC$. Такимъ же образомъ докажемъ, что $BM\perp AC$ и $CN\perp AB$. Отсюда слѣдуетъ, что для того, чтобы вписать требуемый $\triangle$, соединяемъ данныя точки A, B и C и въ полученномъ $\triangle ABC$ проводимъ высоты, пересѣченія которыхъ съ окружностью опредѣлятъ вершины искомаго треугольника MNO.


зад 178. зад. 179.

179. Положимъ, что задача рѣшена и что вписанъ въ окружность такой $\triangle MNO$, высоты котораго NA, MC и OB при продолженіи встрѣчаютъ окружность въ данныхъ точкахъ A, B, C. Соединимъ точки A, B и C. Т. к. $AN \perp OM$ и $OB \perp MN$, то $\angle ANM = \angle MOB$, но $\angle ANM = \angle ACM$ (см. геом. Кис. § 156, 1°) и $\angle MOB = \angle MCB$, слѣдовательно, $\angle ACM = \angle MCB$, т. е. MC есть биссектриссой $\angle ACB$. Точно также докажемъ, что BO есть биссектрисса $\angle ABC$ и AN есть биссектрисса $\angle CAB$. Отсюда слѣдующее построеніе: соединивъ точки A, B и C, получимъ $\triangle ABC$, затѣмъ проведемъ биссектриссы угловъ и продолжимъ ихъ до пересѣченія съ окружностью въ точкахъ M, N и O. Соединивъ точки M, N и O прямыми, получимъ искомый треугольникъ.

180. Предположимъ, что задача рѣшена, что $\triangle ABC$ искомый, и что точки M′, D′, H′ суть точками пересѣченія медіаны AM, биссектриссы AD и высоты AH съ описаннымъ кругомъ центра O. Прямая OM, соединяющая центръ O съ срединою хорды BC, перпендикулярна къ этой хордѣ. т. е. будетъ $\parallel AH$; эта же прямая дѣлитъ дугу BC въ точкѣ D′ на 2 равныя части. Отсюда слѣдуетъ достроеніе: чрезъ 3 данныя точки M′, D′, H′, проводимъ окружность, затѣмъ проводимъ радіусъ OD′ и хорду $AH' \parallel OD'$. Хорда AM′ пересѣкаетъ OD′ въ точкѣ M, чрезъ которую проводимъ хорду BC, перпендикулярную къ OD′ или H′A.


зад. 180


зад. 181

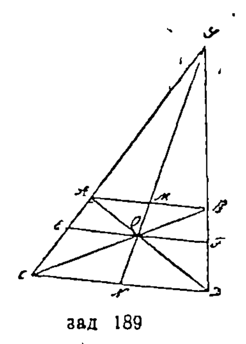
181. Положимъ, что задача рѣшена, и пусть AC и BD будутъ искомыя параллельныя линіи. Проводимъ AB и CD; получаемъ трапецію ABCD, въ которой прямая MN, соединяющая середины сторонъ AB и CD, $= \frac{AC+BD}{2}$ или $= \frac{l}{2}$. Слѣдовательно, точка N находится на окружност, описанной изъ точки M, какъ изъ центра, радіусомъ $\frac{l}{2}$. Кромѣ того, хорды AB и CD равны, какъ стягива-

ющія равныя дуги; слѣдовательно, онѣ одинаково удалены отъ центра, и точка N находится также на окружности, описанной изъ центра O радіусомъ OM. Точка N будетъ тогда опредѣлена. Если теперь провести MN, а чрезъ точки A и B—линіи AC и BD, параллельныя этой прямой, то получатся искомыя хорды.

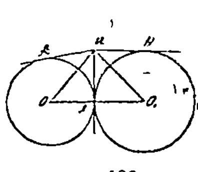
Примѣчаніе. Дуги, описанныя радіусами MN и OM, пересѣкаются во второй точкѣ N′, и задача допускаетъ два рѣшенія; но если придать MN наибольшее значеніе, которое очевидно будетъ MO+ON, то задача даетъ лишь одно рѣшеніе, и параллельныя линіи AC и BD находятся въ равномъ разстояніи отъ центра, а l равно 4OM; задача была бы невозможна при $l > 4OM$. При $l = AB$ или $\frac{l}{2} = AM$, параллельная линія AC сводится къ точкѣ, и задача уже невозможна. Итакъ, вопросъ возможенъ лишь при $AB < l < 4OM$, или въ крайнемъ случаѣ при $l = 4OM$.

189. Продолжимъ въ трапеціи ABDC не параллельныя стороны до пересѣченія въ точкѣ S и проведемъ діагонали AD и BC, которыхъ точка пересѣченія будетъ O. Проведя черезъ O прямую EF ‖ AB, получимъ подобные треугольники AEO и ACD и подобные треугольники BOF и BCD, почему $\frac{EO}{CD} = \frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BD} = \frac{OF}{CD}$, откуда $\frac{EO}{CD} = \frac{OF}{CD}$, почему EO=OF. Но мы знаемъ, что прямые (SC, SN, SD), исходящія изъ одной точки (S) и пересѣкаемыя рядомъ параллельныхъ прямыхъ (AB, EF, CD), разсѣкаются ими на пропорціональныя части, поэтому $\frac{AM}{MB} = \frac{EO}{OF} = \frac{CN}{ND}$, откуда AM=MB и CN=ND. Такимъ образомъ прямая SO, соединяющая точку пересѣченія непараллельныхъ сторонъ трапеціи S съ точкою пересѣченія ея діагоналей O, дѣлитъ параллельныя стороны AB и CD въ точкахъ и N пополамъ.

190. Дана касательная AMB къ 2 окружностямъ O и O′. Требуется доказать, что 2ON:AB=AB:2O₁N. Соединивъ O съ O_1 и проведя общую касательную MN, видимъ, что $\angle AMO = \angle OMN$ и $\angle NMO^1 = \angle BMO^1$, почему $\angle AMO + \angle BMO^1 = \angle OMN + \angle NMO^1 = d$ и, слѣдовательно, $\triangle OMO_1$ прямоугольный. Но $MN \perp OO'$, почему ON : MN=MN : NO′ или 2ON : 2MN=2MN : 2NO′ или такъ какъ MN=AM=MB, 2ON : AB=AB : 2NO′, что и требовалось доказать.

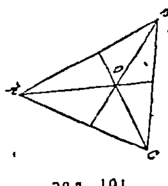


зад 189

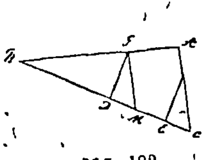


зад 190

191. Пусть стороны треугольника будутъ $BC=a$, $AC=b$ $Ab=c$: отрѣзки медіанъ AO, BO и CO будутъ соотвѣтственно a', b', c'. Имѣемъ $m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$ почему $\frac{2}{3}m_a=a'=\frac{1}{3}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$, откуда $Ga_1^2=2b'^2+2c^2-a^2$. Точно также получимъ $Gb_1^2=2a^2+2c^2-b^2$ и $Gc_1^2=2a^2+2b^2-c^2$. Складывая эти три равенства получимъ: $a^2+b^2+c^2=3(a_1^2+b_1^2+c_1^2)$.



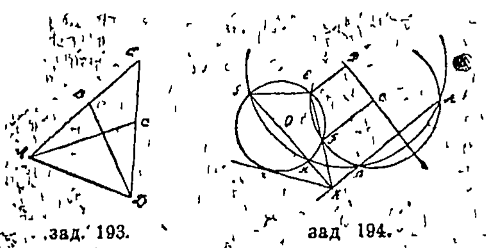
зад 191



зад 192.

192 Проведемъ $GM \parallel AC$; найдемъ, что прямоугольные треугольники DGM и EFC, у которыхъ $DG=EF$ и $\angle DMG=\angle ECF$, равны, почему $DM=EC$. Кромѣ того мы имѣемъ $BD:DG=DG:DM$, но $DM=EC$, почему $BD:DG=DG\cdot EC$, что и требовалось доказать

193. Проводимъ BC, BD, AC и AD. Изъ равенства $EA.EB=ED.EC$ получается $\frac{EA}{ED}=\frac{EC}{EB}$ $\triangle$-ки AEC и BED подобны, такъ какъ у нихъ по равному углу между пропорціональными сторонами, а $\angle$-ы EAC и BDE равны; потому, если на линіи BC описать сегментъ, имѣющій $\angle EAC$, то дуга этого сегмента пройдетъ также чрезъ точку D. Стало быть, всѣ четыре точки A, B, C, D находятся на одной окружности



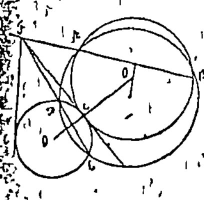
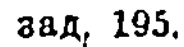
зад. 193. зад. 194.

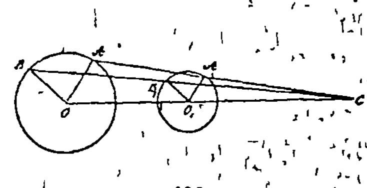
194. Пусть кругъ, проведенный чрезъ A и B и имѣющій центръ въ C, пересѣкаетъ кругъ O въ точкахъ G и H. Пусть хорда EF встрѣчаетъ AB въ точкѣ H; проведемъ прямую GK и докажемъ, что она пройдетъ чрезъ H. Если прямая GK пересѣкаетъ кругъ O въ точкѣ H', а кругъ D въ H", то на основаніи § 218 и 219, для круга O имѣемъ: GK.H'K=EK FK, а для круга D получимъ: GK:H'K. Прямая H'K и H"K считаются по прямой GK, поэтому точки H' и H" пересѣченія круговъ O и D съ GK сливаются между собой, и, слѣдовательно, составляютъ также общую ихъ точку пересѣченія, находящуюся на сѣкущей GK.

Слѣдствіе. Касательная KZ, проведенная изъ общей точки K пересѣченія хорды круговъ, въ кругу O будетъ въ той же точкѣ Z касательною и къ кругу, проходящему чрезъ A и B и касательному съ ZK въ точкѣ Z Въ самомъ дѣлѣ KZ^2=KG. KH. но KG. KH=AK. BK, слѣдовательно, KZ^2=AK. BK, а точки Z, A и B принадлежатъ кругу, проходящему чрезъ A, B и касательному съ ZK въ точкѣ Z.

195. Пусть A и B двѣ данныя точки и O центръ даннаго круга. Положимъ, что задача рѣшена, и пусть O' означаетъ центръ искомаго круга, касающагося O въ точкѣ C. Этотъ центръ O' лежитъ на перпендикулярѣ, возставленномъ изъ средины AB и на прямой OCO', проходящей чрезъ точку C; поэтому рѣшеніе задачи сводится на опредѣленіе точки C. Но проведенная чрезъ точку C касательная къ кругу O, будетъ касательною и къ искомому кругу, откуда видимъ, что она пересѣчетъ AB въ точкѣ F пересѣченія AB съ хордою ED, полученною отъ сѣченія какого нибудь круга, проходящаго чрезъ A и B, съ кругомъ O. Слѣдовательно, для рѣшенія задачи, беремъ на перпендикулярѣ, возстановленномъ изъ средины AB, какую нибудь точку, чтобы кругъ, описанный изъ нея какъ центра, пересѣкъ данный кругъ O въ точкахъ E и D; изъ точки

пересѣченія AB съ ED' проводимъ касательныя FC и FC' къ кругу O и чрезъ 2 точки A и B и каждую изъ C, C проводимъ окружности, которыя и будутъ искомыя. Задача имѣетъ 2 рѣшенія. Если точки A и B равно отстоять отъ центра O, то прямыя AB и ... будутъ параллельны, и для рѣшенія достаточно будетъ провести къ кругу O касательныя параллельныя AB и чрезъ ихъ точки касанія и точки A и B провести круги. Задача будетъ невозможна, если одна данная точка будетъ внѣ круга, а другая внутри его.



зад. 195.

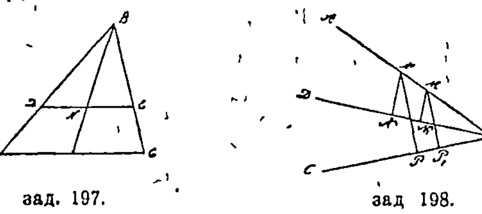

зад. 196.

196. Пусть OO' будутъ линія центровъ и радіусъ $OA \parallel O_1A_1$ и $OB \parallel O_1B_1$. Проведя линію AA' и затѣмъ продолживъ ее до пересѣченія съ OO', въ точкѣ C, докажемъ, что линія BB', при продолженіи ея, пересѣчетъ линію центровъ въ той же точкѣ C. Для доказательства соединимъ B и B' съ C и докажемъ, что линія BC и B'C сливаются. Въ $\triangle\triangle AOC$ и A_1O_1C сторона $AO \parallel A_1O_1$, слѣдовательно, эти треугольники подобны (см. геом. Кис. § 178), почему $OC : O'C = OA : O_1A_1$. Т. к. $OA = OB$ и $O_1A_1 = O_1B_1$, то будемъ имѣть $OC : O'C = OB : O'B'$, и вслѣдствіе равенства $\angle\angle BOC$ и B_1O_1C, находимъ. что $\triangle\triangle BOC$ и $B'O'C$ подобны, т. е. что $\angle BCO = \angle B_1CO_1$, и, слѣдовательно, линія BC сливается съ B'C. Итакъ, мы видимъ, что продолженіе линіи BB', пересѣчетъ линію центровъ въ точкѣ C.

197. Пусть BM будетъ медіана относительно стороны AC и линія $DE \parallel AC$. Требуется доказать, что $DN = EN$. Мы знаемъ, что прямыя, исходящія изъ одной точки и пересѣкаемыя рядомъ параллельныхъ прямыхъ, разсѣкаются ими на пропорціональныя части и сами дѣлятъ эти параллельныя на пропорціональныя части (см. геометр. Кис § 194), слѣдовательно $AM : MC = DN : NE$, а т. к. $AM = MC$, то и $DN = NE$, что и требовалось доказать.

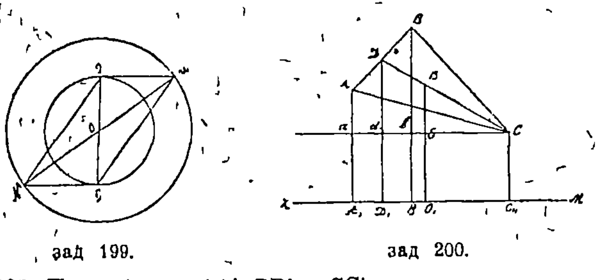
198. Даны прямыя AB, DB и CB, исходящія изъ одной точки B и точка M, движущаяся по прямой AB. Требуется доказать, что $MN : MP = M_1N_1 : M_1P_1$. Изъ подобныхъ треугольниковъ MNB

и M_1N_1B (см. геом. Кис. § 178) имѣемъ $MB : M_1B = MN : M_1N$ точно также изъ подобныхъ уреугольниковъ MPB и M_1P_1B имѣемъ $MB : M_1B = MP : M_1P_1$, слѣдовательно $MN : M_1N_1 = MP : M_1P_1$ и $MN : MP = M'N' : M'P'$, что и требовалось доказать.



зад. 197. зад 198.

199. Проведемъ діаметръ MN и соединимъ N съ E и F; мы получимъ параллелограммъ MENF (такъ какъ $MO=ON$ и и $EO=$ $=OF$) а потому $2EM^2+2MF^2=EF^2+MN^2$, откуда $EM^2+MF^2=\frac{1}{2}$ $(EF^2+MN^2)=\text{const}$.



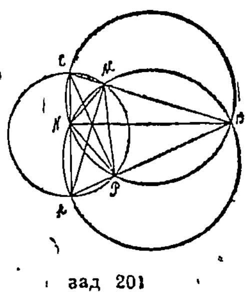
зад 199. зад 200.

200. Пусть будутъ AA', BB' и CC' перпендикуляры, опущенные изъ вершинъ треугольника ABC, на прямую ZM, D — середина стороны AB и O—точка, дѣлящая прямую DC въ отношеніи 1 : 2. Проведя Ca параллельно прямой ZM, находимъ $OE : Dd = 2 : 3$ или $OE = \frac{2}{3}Dd = \frac{2}{3}(DD' - dD')$. Но $2DD' = AA' + BB'$, слѣдовательно

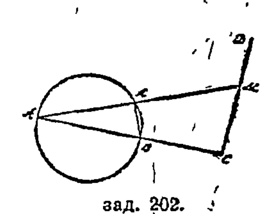
$$OO' = \frac{AA' + BB'}{3} - \frac{2}{3}dD + EO' = \frac{AA' + BB' + CC'}{3}$$

201. Предположимъ, что въ данномъ $\triangle ABC$ проведены высоты AM, BN и CP. Соединивъ M, N и P прямыми, получимъ $\triangle\triangle$ ANP, BPM и CMN; требуется доказать, что эти треугольники подобны $\triangle$-ку ABC. Докажемъ, напримѣръ, что $\triangle\triangle ABC$ и BPM подобны. Въ этихъ треугольникахъ $\angle ABC$ общій, поэтому если докажемъ, что $\angle ACB = \angle MPB$, то $\triangle\triangle ABC$ и BPM будутъ подобны. Опишемъ окружности на AC, CB и AB, к. на діаметрахъ; точки

N и P будутъ лежать на этихъ окружностяхъ, т. к. вершины прямыхъ угловъ, опирающихся на діаметры AC, CB и AB. Изъ прямоугольныхъ $\angle\triangle ACM$ и CPB имеемъ равенство $\angle ACM + \angle CAM = d = \angle CPM + \angle MPB$, но $\angle CAM = \angle CPM$, т. к. углы опирающіеся на одну и ту же дугу CM, слѣдовательно, имѣемъ $\angle ACM + \angle CAM = \angle CAM + \angle MPB$, почему $\angle ACM = \angle MPB$ и $\angle ACB = \angle MPB$, что требовалось доказать. Докажемъ точно также, что $\angle NPA = \angle ACB$, слѣдовательно, $\angle MPB = \angle NPA$. Вычитая это равенство изъ равенства $\angle APN + \angle NPC = \angle CPM$ т. е. что прямая CP будетъ биссектриссой $\angle NPM$. Срав. рѣш. 151.



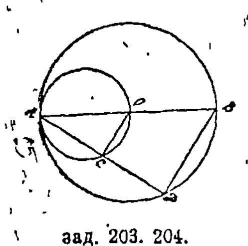
зад 201

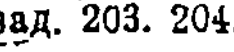

зад. 202.

202. Треугольники AA'B и AMC подобны, т. к. уголъ MAC общій, $\angle ACM = 90^0$ и $\angle AA'B = 90^0$, какъ опирающійся на діаметръ. Изъ подобія этихъ треугольниковъ имѣемъ: $AM : AB = AC : AA'$, откуда $AM . AA' = AB . AC = const$.

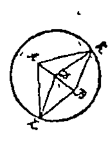
203. Проведя чрезъ данную точку A въ данной окружности центра O діаметръ AB и какую нибудь хорду AD, изъ центра O опустимъ перпендикуляръ на хорду AD (см. чэрт. зад. 204). Изъ подобія треугольниковъ ABD и AOC имѣемъ: $AB : AO = AD : AC$; но $AB = 2AO$, слѣдовательно, $2AO : AO = AD : AC$, откуда $AD = 2AC$, т. е. хорда AD дѣлится въ точкѣ C пополамъ. Такъ какъ $\angle ACO = 90^0$, то, слѣдовательно, точка C лежитъ на окружности, описанной на AO, какъ на діаметрѣ. Это же разсужденіе относится ко всякой хордѣ, проведенной чрезъ точку A. Отсюда слѣдуетъ, что всякая точка C новой окружности будетъ срединой нѣкоторой хорды AD, т. к. $\angle ACO = 90^0$ и, слѣдовательно, $OC \perp AD$ и $AC = CD$, почему эта окружность и будетъ искомымъ геометрическимъ мѣстомъ точекъ.

204. Въ данной окружности чрезъ данную точку А проводимъ діаметръ АВ и какую нибудь хорду АД, которые въ точкахъ О и С дѣлятся въ отношеніи m : n и AC : CD = m : n. Изъ подобія треугольниковъ имѣемъ OC ‖ BD и ∠ACO = ∠ADB, а т. к. ∠ADB = 90°, то и ∠ACO = 90°, почему точка С точно также, какъ и другія точки дѣлящія хорды, проходящія черезъ А, въ отношеніи m : n лежитъ на окружности, опирающейся на АО, какъ на діаметрѣ. И такъ, эта окружность и есть геометрическое мѣсто точекъ, дѣлящихъ всѣ хорды, проведенныя изъ одной и той же точки окружности и въ одномъ и томъ же направленіи.





зад. 203. 204.

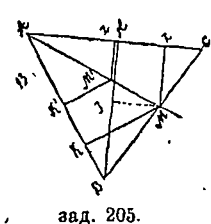


зад 205.

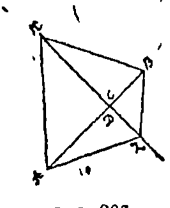
205. Если допустимъ, что М будетъ какая либо точка искомаго мѣста, то $\frac{MK}{MZ} = \frac{m}{n}$. Проводимъ АМ и на этой прямой возьмемъ какую либо точку М, потомъ проведемъ линію M_1K_1 и M'Z', соотвѣтственныя перпендикулярныя къ АВ и АС. Изъ подобныхъ треугольниковъ АМК и AM'K' имѣемъ $\frac{MK}{M'K'} = \frac{AM}{AM'}$. Изъ подобныхъ треугольниковъ AMZ и AM'Z' имѣемъ: $\frac{MZ}{M'Z'} = \frac{AM}{AM'}$, почему $\frac{MK}{M'K'} = \frac{MK}{M'Z'}$, откуда $\frac{MK}{MZ} = \frac{M'K'}{M'Z'} = \frac{m}{n}$. Такимъ образомъ, искомое мѣсто будетъ прямая АМ. Чтобы найти на ней точку, возьмемъ AB = AC, затѣмъ проведемъ къ АС перпендикуляръ ВН и раздѣлимъ ВН на два такіе отрѣзка, чтобы $\frac{BZ}{ZN} = \frac{m}{n}$. Прямая ZN, проведенная параллельно АС, опредѣлитъ на ВС точку М, относящуюся къ этому геометрическому мѣсту, ибо MZ = ZN, а т. к. треугольники BJM и ВКМ равны (уголъ B = C = BMJ), то MK = BJ.

206. Положимъ, что К и Z—двѣ изъ точекъ искомаго геометрическаго мѣста: соединяемъ ихъ съ данными точками А и В,

...же съ срединой D, отрѣзка AB. *Имѣемъ* (*см геом. Кисел.* § 213) $KA^2+KB^2=2\ (AD^2+KD^2)$ и $ZA^2+ZB^2=2\ (AD^2+ZD^2)$, (ибо KD, ZD—медіаны △△KAB и ZAB); по условію $KA^2+KB^2=ZA^2+ZB^2=\text{const}$, т. е. точки K и Z лежатъ въ равномъ разстояніи отъ D; такимъ образомъ, искомое геометрическое мѣсто есть окружность, центръ которой находится въ серединѣ отрѣзка между данными точками.



зад. 205.



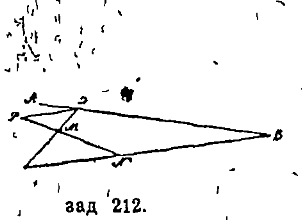
зад. 207

207. Пусть точки A и B—данныя, а K и Z—двѣ изъ точекъ искомаго геометрическаго мѣста. Опуская изъ K и Z на прямую AB перпендикуляры KC и ZD, изъ прямоугольныхъ треугольниковъ CAK, CBK, DAZ и DBZ будемъ имѣть: $KA^2=AC^2+KC^2$; $KB^2=CB^2+KC^2$ $ZA^2=AD^2+ZD^2$; $ZB^2=DB^2+ZD^2$; по условію $KA^2-KB^2=ZA^2-ZB^2=\text{const}$., или $AC^2-CB^2=AD^2-DB^2=\text{const}$. отсюда, $(AC+CB)\ (AC-CB)=(AD+DB)\ (AD-DB)=AB.(AC-CB)=AB.(AD-DB)$ или $AC-CB=AD-DB$; складывая полученное равенство съ равенствомъ: $AC+CB=AD+DB$, найдемъ: $AC=AD$. т. е. точка D совпадаетъ съ точкой C и точки K и Z лежатъ на одномъ и томъ же перпендикулярѣ къ AB; этотъ перпендикуляръ и будетъ искомымъ геометрическимъ мѣстомъ.

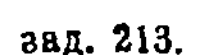
212. Внутри угла ABC дана точка M; требуется провести прямую DC такъ, чтобы $DM:DC=m:n$ Проведя произвольную прямую MN и раздѣливъ ее на n равныхъ частей, откладываемъ на продолженіи ея отрѣзокъ MP, равный m частямъ, и затѣмъ проводимъ чрезъ точку P прямую $PD \parallel BC$. Соединяя точку D пересѣченія прямой PD и стороны угла AB съ точкой M, получимъ искомую линію CD. *Дѣйствительно, т. к. треугольники* MPD и CMN подобны (ибо у нихъ углы равны), то $DM:MC=PM:MN=m:n$.

213. Пусть искомый △ будетъ ABC. На сторонѣ BC опредѣляемъ точку D такъ, чтобы разстоянія ея DR и DP отъ двухъ другихъ сторонъ AB и AC относились какъ $m:n$, т. е. $DR:DP=m:n$. Для этого поступаемъ такъ: произвольную прямую XJ дѣ-

лимъ въ точкѣ Z такъ, чтобы $XZ : ZJ = m : n$, затѣмъ проводимъ прямую FN параллельно AC на разстояніи ZJ отъ нея и прямую JN ∥ AB на разстояніи XZ отъ нея такъ, что $MN : ZN = m : n$. Прямая NOD, на которой находится и точка D, будетъ геометрическимъ мѣстомъ точекъ, изъ которыхъ перпендикуляры опущенные на двѣ стороны AB и AC, относятся, какъ $m : n$. Точно также найдемъ CE геометрическое мѣсто точекъ, изъ которыхъ опущенные перпендикуляры на двѣ стороны AC и BC, относились какъ $n : p$. Точка пересѣченія O этихъ двухъ геометрическихъ мѣстъ будетъ искомой.

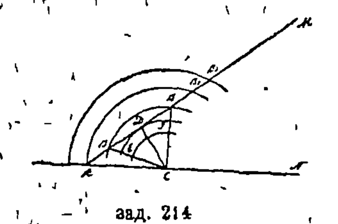


зад. 212.

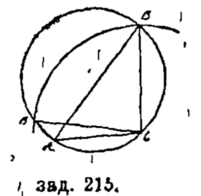


зад. 213.

214. Положимъ, что требуется построить △ABC, въ которомъ дана сторона AC, ∠BAC и отношеніе $AC : BC = m : n$. Чтобы рѣшить задачу, строимъ ∠MAN = данному углу, на сторонѣ его AN откладываемъ часть AC = данной сторонѣ, затѣмъ изъ C радіусомъ $= AC \cdot \frac{m}{n}$, описываемъ дугу, пересѣченіе которой съ AM другою стороною ∠MAN опредѣлитъ третью вершину треугольника. Рѣшеній будетъ два, когда BC будетъ $>DC$ и $<AC$, одно, когда $BC = DC$ или же $BC > AC$, и ни одного, когда $BC < DC$.



зад. 214

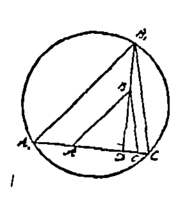


зад. 215.

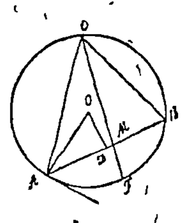
215. Положимъ, что требуется построить △ABC, въ которомъ даны сторона AC, ∠ABC и отношеніе $AC : BC = m : n$. Чтобы рѣшить эту задачу опишемъ на сторонѣ AC дугу, вмѣщающую ∠ABC, затѣмъ изъ C радіусомъ, равнымъ $AC \cdot \frac{n}{m}$, опишемъ дугу, пересѣ-

ченіе которой съ первой дугой опредѣлить B третью вершину искомаго $\triangle ABC$. Здѣсь можетъ быть два рѣшенія (когда BC < діаметра круга, описаннаго около $\triangle ABC$ и > AC), одно рѣшеніе (когда BC = діаметру круга, описаннаго около $\triangle ABC$, или BC < AC) и ни одного рѣшенія (когда BC > діаметра круга, описаннаго около $\triangle ABC$).

216. На прямой A'C' отъ произвольной точки D откладываемъ отрѣзки A'D и C'D, которые бы находились между собою въ *отношеніи m : n*. Затѣмъ въ точкѣ D возстановляемъ перпендикуляръ DB' до пересѣченія его съ окружностью, проходящею чрезъ A' и C', и вмѣщающей $\angle A'B'C = \angle ABC$. Такимъ образомъ получимъ $\triangle A'B'C'$. На высотѣ DB', отъ точки D откладываемъ отрѣзокъ DB, равный данной высотѣ, и чрезъ точку B проводимъ BA ∥ B'A' и BC ∥ B'C'. $\triangle ABC$ будетъ искомый: Въ самомъ дѣлѣ, $\angle ABC = \angle A'B'C'$, A'D : AD = B'D : BD = C'D : CD, откуда A'D.C'D = AD : CD = m n.



зад 216

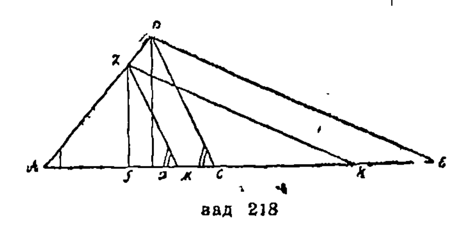


зад 217.

217. Описываемъ на B окружность, вмѣщающую данный $\angle ABC$, для чего при концѣ прямой AB строимъ $\angle BAE$, равный данному углу; изъ средины прямой AB возстановляемъ перпендикуляръ DO и изъ точки A перпендикуляръ къ AE. Пересѣченіе O этихъ двухъ перпендикуляровъ принимаемъ за центръ и радіусомъ OA описываемъ окружность. Всякій уголъ, вписанный въ сегментъ ACB, будетъ равенъ данному углу. Такъ какъ биссектрисса $\angle ABC$ дѣлитъ дугу AFB на равныя части, то, раздѣливъ дугу AFB въ F пополамъ и проведя FM до пересѣченія съ окружностью въ точкѣ C, найдемъ третью вершину C треугольника ABC.

218. Такъ какъ даны 2 угла треугольника, то его видъ извѣстенъ, и потому построимъ какой нибудь $\triangle ABC$, подобный искомому; затѣмъ измѣряемъ сумму его высоты BD и основанія AC. Если построеніе сдѣлано такъ удачно, что BD+AC=S, то $\triangle ABC$

и будетъ искомый. Но вообще этого не случится, и сумма BD+AC будетъ равна прямой S', а не S. Чтобы передѣлать $\triangle ABC$ въ искомый, надо его умножить на $S:S'$; тогда и высота BD и основаніе AC умножатся на $S:S'$, сумма $BD+AC$ умножится на то же число и будетъ равна $S'\ \frac{S}{S'}=S$. Для этого не должно измѣрять во сколько разъ S' болѣе или менѣе S, а нужно отложить $AE=S'$ и $AK=S$, провести $KZ \parallel BE$ и затѣмъ $ZM \parallel BC$. Тогда $\triangle AZM$ будетъ искомый. Въ самомъ дѣлѣ изъ $\triangle\triangle AZM$, ABC AZK и ABC имѣемъ; 1) $AB:AZ=S'.S$ и 2) $AB \cdot AZ=BD:ZG=AC:AM$ Изъ пропорціи находимъ (2) $AB.AZ=(BD+AC)\cdot(ZG+AM)$ или $AB:AZ=S':(ZG+AM)$ Сравнивая послѣднюю пропорцію съ (1) видимъ, что $ZG+AM=S$, что и требовалось доказать.



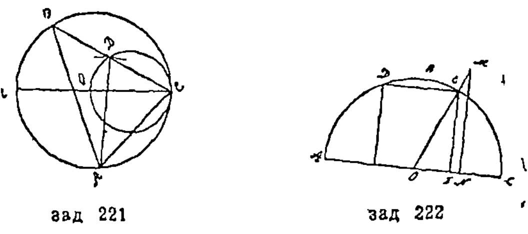
зад 218

219 Предположимъ, что требуется построить равнобедренный треугольникъ ABC, въ которомъ данъ уголъ B при вершинѣ и сумма $AC+BD$ (см. чертежъ 32 въ § 32 геом. Кисел.). Такъ какъ искомый треугольникъ равнобедренный и извѣстны углы A и C, то рѣшеніе этой задачи приводится къ *зад 218*

220. Мы знаемъ, что биссектрисса внутренняго угла треугольника пересѣкаетъ противоположную сторону въ такой точкѣ, которой разстоянія отъ концовъ этой стороны пропорціональныя двумъ другимъ сторонамъ треугольника, поэтому, раздѣливъ основаніе въ данномъ отношеніи, найдемъ на основаніи точку, чрезъ которую проходитъ биссектрисса угла при вершинѣ, и тогда задача сводится къ рѣшенію *задачи 217*

221. Положимъ, что требуется вписать въ данную окружность $\triangle ABC$, въ которомъ дано основаніе AC и медіана AD, относительно сторвны BC. Чтобы рѣшить эту задачу, изъ произвольной точки A опишемъ дугу, радіусомъ, равнымъ AC, искомаго треугольника ABC. Затѣмъ, чрезъ точку C проводя діаметръ CE, на радіусѣ CO

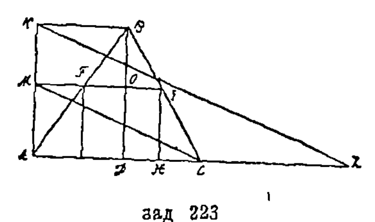
какъ на діаметрѣ описываемъ окружность и, наконецъ изъ A радіусомъ, равнымъ данной медіанѣ, описываемъ дугу, пересѣченіе которой съ только что описанной окружностью опредѣлитъ средину стороны BC искомаго треугольника ABC. Проведя прямую чрезъ C и D до пересѣченія съ окружностью въ точкѣ B, получимъ третью вершину △-ка ABC.



зад 221 зад 222

222 Пусть искомы квадратъ будетъ DEFG, точка O будетъ средина хорды AC, такъ что AO=OC Изъ произвольной точки N хорды AC возстанавливаемъ къ ней перпендикуляръ NM, равный 2ON. Точка пересѣченія OM съ дугой будетъ одной вершиной квадрата. Проведя ED || AC, EF || MN и DG || EF, получимъ искомый квадратъ.

223 Предположимъ, что задача рѣшена и искомый квадратъ FEGH вписанъ въ данный △ABC. Разсматривая фигуру, замѣчаемъ, что сторона FG искомаго квадрата параллельна сторонѣ AC даннаго треугольника, и потому достаточно знать одну изъ точекъ этой стороны FG, напримѣръ точку O ея пересѣченія съ высотою

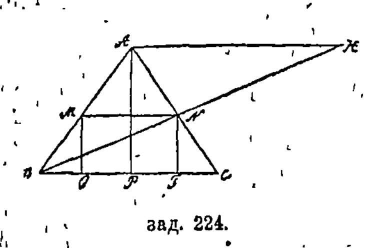


зад 223

BD. Но если означимъ сторону искомаго квадрата чрезъ x и положимъ BD=h, то будемъ имѣть BO=h−x, а треугольникъ ABC и FBG дадутъ пропорцію. AC : FG=BD BO или $b : x = h . (h-x)$, и отсюда $x = \frac{bh}{b+h}$ Это выраженіе показываетъ что сторона ис-

комаго квадрата есть четвертая пропорціональная къ тремъ линіямъ: b, h и b+h. Слѣдовательно, задача можетъ имѣть одно, два или 3 рѣшенія, смотря потому, будетъ ли данный треугольникъ ABC равносторонній, равнобедренный или разносторонній. Построеніе достаточно поясняется чертежомъ.

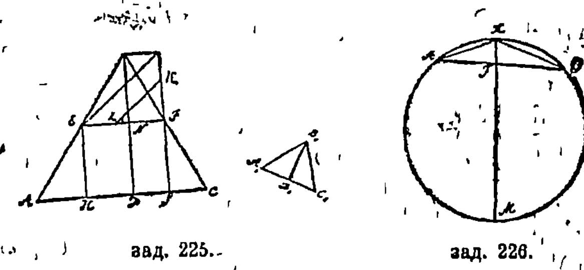
224. Предположимъ, что задача рѣшена, а именно въ данномъ $\triangle ABC$ вписанъ искомый прямоугольникъ MNFQ, у котораго MN : NF = m : n. Изъ вершины A даннаго треугольника ABC опускаемъ ⊥AP на BC, тогда изъ подобныхъ треугольниковъ APC и NFC имѣемъ AP : NF = AC : NC. Затѣмъ чрезъ точку A проводимъ AH ∥ BC, которая по положенію ∥ MN, и точку B соединяемъ съ точкою N прямою BN, которую продолжаемъ до пересѣченія съ прямою AH въ точкѣ H, тогда изъ подобныхъ треугольниковъ BAH и BMN имѣемъ: AB : BM = AH : MN. Такъ какъ MN ∥ BC, а мы знаемъ, что стороны угла параллельными дѣлятся на пропорціональныя части, то на основаніи этого имѣемъ AB : BM = AC : CN. Сравнивая эту пропорцію съ первою, получаемъ AP : NF = AB : BM; сравнивая, наконецъ, эту пропорцію со второю, получаемъ AP : NF = AH : MN. Такъ какъ MN и NF суть стороны искомаго прямоугольника, то AH : AP = m : n. Это показываетъ, что для построенія искомаго прямоугольника въ данномъ треугольникѣ ABC должно изъ вершины A провести высоту AP и прямую AH ∥ BC, на которой откладываемъ часть AH такъ, чтобы $\frac{AH}{AP} = \frac{m}{n}$. Затѣмъ соединяемъ точку B съ точкою H прямою BH, которая пересѣчетъ сторону AC въ точкѣ N. Если мы изъ этой точки N опустимъ ⊥NF на BC и проведемъ NM ∥ BC, то эти прямыя суть стороны искомаго вписаннаго прямоугольника MNFQ и находятся въ отношеніи m : n. Въ самомъ дѣлѣ, изъ подобныхъ $\triangle\triangle$BAP и BMQ имѣемъ: BA : BM = AP : MQ; изъ подобныхъ $\triangle\triangle$BAH и BMN имѣ-



зад. 224.

къ: $BA : BM = AH : MN$, почему $AP : MQ = AH : MN$. Но $AH : AP = m : n$, слѣдовательно и $MN : MQ = m : n$ а такъ какъ $MQ = NF$, то и $MN : NF = m : n$, что и требовалось доказать.

225. Предположимъ, что задача рѣшена и что около даннаго квадрата EFGH описанъ треугольникъ ABC, подобный данному треугольнику A'B'C'. Опустимъ перпендикуляры BD и B'D' на основанія AC и A'C' и обозначимъ: $BN = x$, $AC = y$, $EF = m$, $A'C' = l$ и $B'D' = h'$. Изъ подобія треугольниковъ EBF и ABC имѣемъ: $EF : AC = BN : BD$ или $m : y = x : (x + m)$, а изъ подобія треугольниковъ ABC и A'B'C' получимъ $(x + m) : y = h' : b'$. Рѣшивъ эти уравненія, найдемъ: $x = \frac{mh'}{b'}$. Теперь постараемся построить x, для чего на продолженіи FG отложимъ $FK = h' = FZ = b'$; затѣмъ проведемъ KZ и $EJ \parallel ZK$ и найдемъ, что $JF = x$, такъ какъ $JF : EF = FK : FZ$ или $JF : m = h' : b'$, откуда $JF = \frac{mh'}{b} = x$. Затѣмъ по EF, $JF = BN$ и $\angle EBF = \angle A'B'C'$ строимъ $\triangle EBF$ и, продолживъ BE, BF и HG, получимъ искомый $\triangle ABC$.

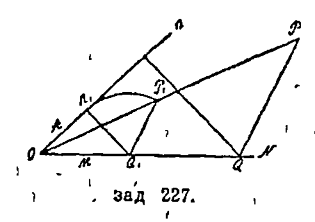


зад. 225. зад. 226.

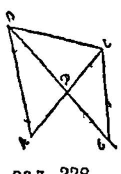
226. Пусть искомою точкою будетъ X такъ, что $AX : XB = m : n$. Тогда, соединивъ X съ точкою M срединою дуги AMB, найдемъ, что $\angle AXM = \angle MXB$, а потому (см. геом. Кис. § 198) $\frac{AX}{XB} = \frac{AF}{FB}$, но $\frac{AX}{XB}$ по предыдущему равно $\frac{m}{n}$, слѣдовательно $\frac{AF}{FB} = \frac{m}{n}$. Откуда заключаемъ, что X лежитъ на прямой, которой извѣстны двѣ точки: M средина дуги AMB и F, дѣлящая AB въ отношеніи $\frac{m}{n}$.

227. Продолживъ прямую MN и AB до пересѣченія въ точкѣ P и соединимъ прямою точки O и P, возстановимъ къ прямой AB

въ какой нибудь точкѣ R' перпендикуляръ R'Q' и наконецъ, PQ || P'Q' и QR || Q'R'. Точка O будетъ искомою. Дѣйствительно △OPQ ∾ △OP'Q', поэтому PQ : P'Q' = OQ : OQ'; треугольники OR… и OR'Q' также подобны, почему RQ : R'Q' = OQ : OQ. Изъ этихъ двухъ пропорцій имѣемъ: PQ : P'Q' = RQ : R'Q', но P Q' = R'Q', слѣдовательно и PQ = RQ, что и требовалось доказать.



зад 227.

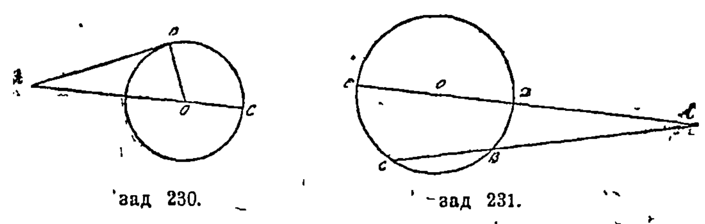


зад. 228.

228. Даны двѣ стороны AB и BC и биссектрисса BD. Продолжимъ BD и проведемъ EC || AB; получимъ равнобедренный треугольникъ. Такъ какъ ∠DEC = ∠ABD и ∠ABD = ∠DBC, то ∠DEC = ∠DBC и, слѣдовательно, треугольникъ BCE равнобедренный, почему BC = EC. Изъ подобія треугольниковъ ABD и EDC имѣемъ $\frac{AB}{EC}=\frac{BD}{DE}$, но EC = BC, слѣдовательно $\frac{AB}{BC}=\frac{BD}{DC}$, откуда $DE=\frac{BC.BD}{AB}$. Построимъ DE, какъ четвертую пропорціональную, найдемъ, что BE = BD + DE. Такимъ образомъ, построивъ равнобедренный треугольникъ EBC, по EB и BC = EC, и отложивъ на BE отрѣзокъ DE, проводимъ DC и, удвоивъ ∠DBC, проводимъ DC и удвоивъ ∠DBC, проводимъ AB, которой и опредѣлится искомый △ABC.

229. Изъ условія задачи имѣемъ: $\frac{x}{m}=\frac{a^2}{b^2}$, откуда $x=\frac{a^2.m}{b^2}=\frac{a^2.m}{b.b}$, или принявъ $\frac{a^2}{b^2}=n, x=\frac{n.m}{b}$. Строимъ сперва n. Для этого на произвольной прямой (см. геом. Кис. § 203, 2°. чер. 17…) откладываемъ часть AB = b и на ней опишемъ полуокружность. Затѣмъ изъ точки A опишемъ дугу радусомъ, равнымъ AD = a и наконецъ, изъ точки D опустимъ перпендикуляръ DC на AB. Отрѣзокъ AC будетъ равенъ n. Найдя n, легко найти X (см. геом. Кис. § 196).

230. Предположимъ, что точка A будетъ искомая, такъ что AC ‖ 2AB. Изъ прямоугольнаго △-ка ABO имѣемъ $AO^2 = AB^2 + OB^2$ и $AO + OC = 2AB$ или $AO^2 = AB^2 + r^2$ и $AO + r = 2AB$. Рѣшая эти уравненія, найдемъ $AO = \frac{5}{3}r$. Построивъ AO, отложимъ на сѣкущей ея величину отъ центра O, точка A будетъ искомая.



зад 230. зад 231.

231. Пусть ABC искомая сѣкущая, такъ что $\frac{AB}{CB} = \frac{m}{n}$ откуда $AB = \frac{CB \cdot m}{n}$. Взявъ сѣкущую ADOE, проходящую черезъ центръ и означивъ AD чрезъ d, OD или OE черезъ r, найдемъ $\frac{d+2r}{AC} = \frac{AB}{d}$ или $\frac{d+2r}{CB+AB} = \frac{d+2r}{CB + \frac{CB\,m}{n}} = \frac{n}{d}$; отсюда

$\frac{n(d+2r)}{CB(m+n)} = \frac{CB \cdot m}{nd}$ откуда $CB^2(m+n)m = n^2d(d+2r)$, а

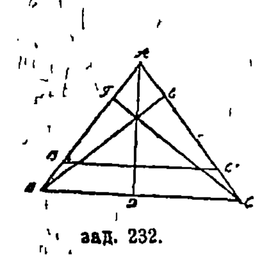
$$CB = \sqrt{\frac{n^2d(d+2r)}{(m+n).m}} = n\sqrt{\frac{d(d+2r)}{(m+n)m}}$$

232. Пусть △ABC искомый. Обозначимъ чрезъ a, b, c его 3 стороны, а чрезъ a', b', c' три соотвѣтственныя высоты. Изъ подобныхъ △△BCF и BAD имѣемъ. $\frac{a}{c} = \frac{c'}{a'}$, откуда $ab' = bb' = cc'$....(1) Дѣля каждое изъ этихъ отношеній на a'b', выходитъ, что $\frac{a}{b'} = \frac{b}{a'} = \frac{cc'}{a'b'} = \frac{c}{\frac{a'b'}{c'}}$, или $\frac{a}{b'} = \frac{b}{a'} = \frac{c}{\frac{a'b'}{c'}}$ Равенство этихъ отношеній показываетъ, что если построить △AB'C', у котораго сторонами будутъ $AC' = b'$, $B'C' = a'$, $AB' = \frac{a'b'}{c'}$, этотъ треугольникъ будетъ подобенъ △-ку ABC, и если припомнить, что въ подобныхъ треугольникахъ высоты, соотвѣтственныя сходственнымъ сторонамъ,

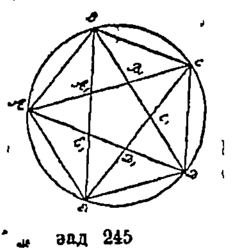
будутъ сходственныя прямыя, то достаточно для полученія △-ка ABC, взять на высотѣ, идущей изъ вершины A, длину AD=a' и провести чрезъ D линію BC, параллельную B'C'.

Примѣчаніе. Дабы задача была возможна, необходимо, чтобы можно было построить △AB'C'. Поэтому, если мы допустимъ, что $a'>b'>c'$, откуда $a'<\frac{a'b'}{c'}$, то условіе возможности будетъ слѣдующее: $\frac{a'b'}{c'}<a'+b'$; ибо какая либо сторона, $\frac{a'b'}{c'}$, будетъ меньше суммы двухъ остальныхъ, полагая, впрочемъ, что она больше ихъ разности.

Треугольникъ AB'C' построить легко, потому что a' и b' даны, третья же сторона AB' есть 4-я пропорціональная къ извѣстнымъ величинамъ a', b' и c



зад. 232.



зад 245

245. Проведемъ въ правильномъ пятиугольникѣ ABCDE діагонали, требуется доказать, что образовавшійся пятиугольникъ A'B'C'D'E' правильный. Мы знаемъ, что около правильнаго пятиугольника можно провести окружность (см. геом. Кис § 228, 1°), слѣдовательно, ∠ABE = ∠EBD = ∠DBC = ∠BCA = ∠ACE = ∠ECD = и т. д, какъ вписанные углы, опирающіеся на равныя дуги, почему равнобедренные треугольники AA'B, BB'C, CC'D и т. д., имѣющія равныя основанія и равные углы при основаніи, равны, а вслѣдствіе ихъ равенства и треугольники AE'A', A'BB', B'CC' и т. д. равны, т. е *A'B'=B'C'=C'D'=D'E'=E'A'* Но углы въ пятиугольникѣ A'B'C'D'E' равны между собою, ибо ∠AA'B=∠E'A'B', какъ углы накрестъ лежащіе, слѣдовательно пятиугольникъ A'B'C'D'E' будетъ правильный

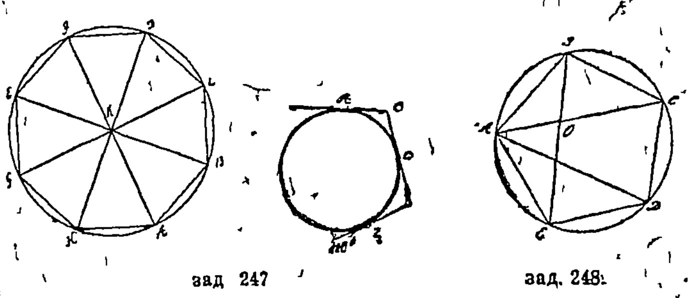
246. Равнобедренные треугольники AOB и DOC равны, почему ∠OAB=∠OCD, а т. к. ∠OCD+∠OCE=2d, то слѣдовател

...но, и $\angle OAB + \angle OCE = 2d$, и около четыреугольника OAEC можно описать окружность.

247. (1°) Изъ центра круга K проведемъ радiусы ко всѣмъ вершинамъ; тогда многоугольникъ раздѣлится на равные равнобедренные треугольники ибо они имѣютъ по 3 равныя стороны. Изъ равенства равнобедренныхъ треугольниковъ слѣдуетъ, что всѣ углы, прилежащiе къ сторонамъ многоугольника, равны между собою, поэтому и сумма каждыхъ двухъ угловъ или углы многоугольника будутъ равны между собой.

(2°). Въ равноугольномъ вписанномъ многоугольникѣ стороны черезъ одну равны между собой

(4°) Въ равностороннемъ описанномъ многоугольникѣ углы черезъ одинъ равны между собой, напримѣръ, $\angle B = \angle M$, потому что $BC = ZM$. Если же число сторонъ нечетное, то всѣ углы равны между собой.



зад 247 зад. 248.

248 Опишемъ окружность вокругъ многоугольника. $\angle BOC = \angle OBC$, т. к. измѣренiе ихъ одинаково, слѣдовательно, $\triangle BOC$ равнобедренный и $BC = OC$. Съ другой стороны $\triangle\triangle AOB$ и BAC, какъ равноугольные подобны, и потому $\frac{AB}{AC} = \frac{AO}{BC}$; стало быть $BC^2 = A'C \cdot AO$ или $CO^2 = AC \cdot AO$, ибо $CO = BC$. Слѣдовательно прямая AOC раздѣлена въ точкѣ O въ среднемъ и крайнемъ отношенiи.

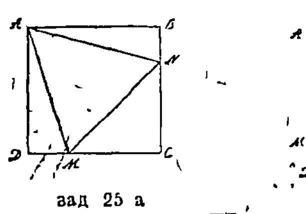
249 См. геом Кисел § 243.

250 См геом Кисел § 243.

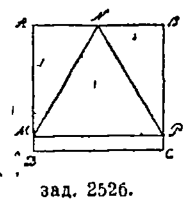
251 Чтобы срѣзать отъ даннаго квадрата углы так, чтобы образовался правильный 8-угольникъ, проводимъ диагнали въ данномъ квадратѣ, затѣмъ изъ пересѣченiя диагоналей опускаемъ пер-

пендикуляръ на одну изъ его сторонъ и радіусомъ, равнымъ этому перпендикуляру вписываемъ въ него кругъ. Чрезъ точки пересѣченія этой окружности съ діагоналями даннаго квадрата проводимъ касательныя къ окружности, тогда и получимъ правильный восьмиугольникъ.

252. а) Предположимъ, что равносторонній $\triangle ANM$ вписанъ въ квадратъ ABCD. Такъ какъ въ прямоугольныхъ треугольникахъ ADM и ABN стороны AB=AD и AN=AM, то слѣдовательно, эти треугольники равны, почему $\angle DAM = \angle BAN$, а такъ какъ $\angle MAN = 60^\circ$, то $\angle DAM + \angle BAN = 30^\circ$ или $2\angle DAM = 30^\circ$, откуда $\angle DAM = 15^\circ$. Отсюда слѣдуетъ построеніе. Для того, чтобы вписать равносторонній треугольникъ въ квадратъ, должно при одной изъ вершинъ квадрата на двухъ его сторонахъ построить углы DAM и BAN равные 15°, а затѣмъ провести прямыя AM, AN и MN. Треугольникъ AMN будетъ искомый.



зад 25 а



зад. 252б.

б) Положимъ, что равносторонній $\triangle MNP$ вписанъ въ квадратъ ABCD. Въ прямоугольныхъ $\triangle\triangle AMN$ и BNP стороны AN=NB и NM=NP, слѣдовательно, и самые треугольники равны, почему $\angle ANM = \angle BNP$, а такъ какъ $\angle MNP = 60^\circ$, то $\angle ANM + \angle BNP = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ = 2\angle ANM$ или $\angle ANM = 60^\circ = \angle BNP$. Отсюда построеніе: При точкѣ N средина стороны AB строимъ два угла ANM и BNP, равные 60°, а затѣмъ соединяя точки N, M, P прямыми, получимъ искомый $\triangle NMP$.

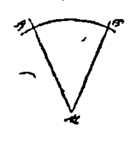
254. а) Строимъ такой равнобедренный треугольникъ, чтобы основаніе его было равно большей части боковой стороны, раздѣленной въ крайнемъ и среднемъ отношеніи (см. геом. Кис. § 236), затѣмъ уголъ, противолежащій основанію дѣлимъ пополамъ.

b). Строимъ уголъ, опирающійся на хорду, равную радіусу, и затѣмъ дѣлимъ его пополамъ. См. рѣшен. зад. 67.

c) На прямой AB при точкѣ N строимъ $\angle ANC=30^0$, а затѣмъ уголъ CNB дѣлимъ пополамъ.

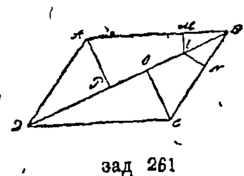
d) Уголъ въ 72^0 половина угла правильнаго десятиугольника, поэтому строимъ правильный десятиугольникъ (см. геом. Кис. § 236), затѣмъ дѣлимъ одинъ изъ его угловъ пополамъ.

255. Докажемъ, что если дуга AD=дугѣ CD, то $\angle AMB : \angle CND = CN : AM = r : R$ Положимъ, что $\angle AMB = m^0$ и $\angle CND = n^0$, тогда дуга $AB = \frac{2\pi Rm}{360}$, а дуга $CD = \frac{2\pi rn}{360}$, но изъ условій задачи имѣемъ $\frac{2\pi Rm}{360} = \frac{2\pi rm}{360}$. почему $Rm = rn$ или $R : r = n : m = \frac{\angle CND}{\angle ANB}$, что и требовалось доказать.



зад. 255.

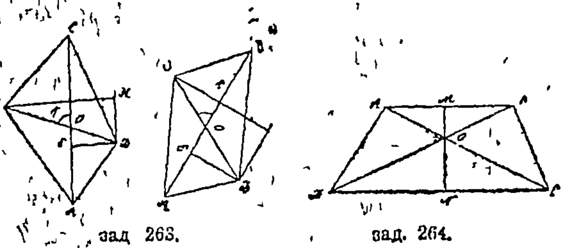
261 Изъ точки E на діагонали BD параллелограмма ABCD опустимъ два перпендикуляра EM и EN на прилежащія стороны AB и BC; требуется доказать, что $\frac{AB}{BC} = \frac{ON}{OM}$. Для этого опустимъ перпендикуляры AP и CO на діагональ BD Изъ подобія треугольниковъ ABP и EBM будемъ имѣть. $\frac{AB}{EB} = \frac{AP}{EM}$. Изъ подобія треугольниковъ BCO и BEN будемъ имѣть: $\frac{BC}{EB} = \frac{OC}{EN}$. Раздѣливъ первую пропорцію на вторую, получимъ: $\frac{AB}{BC} = \frac{AB \cdot EN}{OC \cdot EM}$, но AP=OC (какъ высоты двухъ равныхъ $\triangle\triangle ABD$ и BCD), слѣдовательно, $\frac{AB}{BC} = \frac{EN}{EM}$, что и требовалось доказать.



зад 261

262. Дана трапеція ABCD, въ которой $BC \parallel AD$ и E средин. AB. Изъ точки E опустимъ $\perp EF$ на CD и проведемъ прямую $EG \parallel$ $\parallel BC$ до пересѣченія съ CD въ точкѣ G; опустимъ перпендикуляръ DK на BC. Треугольники EFG и CDK подобны и потому $\frac{EG}{CD}=\frac{EF}{DK}$ или $EG \cdot DK = CD \cdot EF$, гдѣ $EG \cdot DK$=площадь трапеціи ABCD.

263. Положимъ, что въ двухъ четыреугольникахъ ABCD и A'B'C'D' діагональ $AC=A'C'$, $BD=B'D'$ и $\angle BOC = \angle B'O'C'$. Проведемъ $DE \perp AC$, $DH \parallel AC$ и $BH \perp DH$, и точно также $D'E' \perp A'C'$ и $B'H' \perp D'H'$. Будемъ имѣть: площадь ABCD=пл. $\triangle ABC$+пл. ACD= $=\frac{1}{2}AC(BK+DE)$, или такъ какъ $DE=KH=\frac{1}{2}AC \cdot BH$. Такимъ же точно образомъ находимъ, что пл. $A'B'C'D'=\frac{1}{2}A'C' \cdot B'H'$. Изъ равенства прямоугольныхъ треугольниковъ BDH и B'D'H', въ которыхъ $BD=B'D'$ и $\angle BDH = \angle BOK = \angle B'O'K' = \angle B'D'H'$, имѣемъ, что $BH=B'H'$, слѣдовательно, площадь четыреугольника ABCD= =площ. четыреугольн. A'B'C'D' что и требовалось.



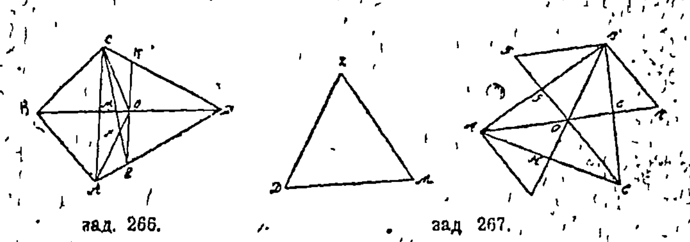
зад 263. зад. 264.

264. Дана трапеція ABCD. Проведемъ высоту MN. Пусть $AB=x$, $MO=y$, $NO=z$, $DC=v$, тогда будемъ имѣть $\frac{xy}{2}=p^2$, $\frac{zv}{2}=$ $=q^2$ и (изъ подобія $\triangle\triangle ABO$ и DOC) $xz=yv$. Площ. трапеціи $ABCD=\frac{1}{2}(x+v)(y+z)=\frac{1}{2}(xy+yv+xz+zv)=\frac{1}{2}(xy+zv)+yv=$ $=p^2+q^2+yv$. Но $p^2q^2=\frac{xyzv}{4}=\frac{y^2v^2}{4}$, почему $2pq=yv$, слѣдов. площадь трапеціи $ABCD=p^2+q^2+2pq=(p+q)^2$, что и требовалось доказать.

265. Пусть AB будетъ сторона правильнаго вписаннаго 6-тиугольника въ кругѣ O. Проведемъ касательныя CA и CB къ кругу и равнодѣлящія $\angle\angle ABO$ и BAO до пересѣченія въ точкѣ D; OC

пересѣчетъ AB въ точкѣ E. Уголъ DOA=∠DAO и ∠DAC=∠DCA, слѣдовательно, OD=AD=CD и CE=$^1/_2$CD=$^1/_2$OC, поэтому площадь △AOE=$^3/_4$ площади △AOC. Умноживъ обѣ части на 12, найдемъ, что площадь правильнаго вписаннаго 6-тиугольника=$^3/_4$ площ. правильнаго описан. 6-тиугольника.

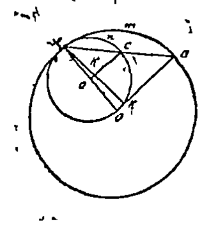
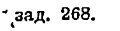
266. Данъ □ABCD, въ которомъ чрезъ точку O-средину діагонали BD проведена прямая KE ‖ CA. Требуется доказать, что площадь □ABCE=площ. △CDE. Соединимъ точку O съ A и C, тогда площ. ABO=площ. AOD и площ. BCO=площ. COD, почему площ. ABO+площ. BCO=площ. AOD+пл. COD или площ. ABCO==пл AOCD. Это послѣднее равенство можемъ написать такъ: пл. ABCN+пл. NCO=пл. ANE+пл. ENOCD. Дальше мы видимъ, что △AOE и △COE равновелики, (см. геом. Кис. § 277, 1°), слѣдовательно и △△ANE и NCO тоже равновелики, почему предыдущее равенство не нарушится, если мы его напишемъ такъ: пл. ABCN++ANE=пл. NCO+пл. ENOCD, тогда мы видимъ, что пл. ABCE==пл. CDE, что и требовалось доказать.

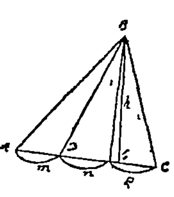


зад. 266. зад 267.

267. Предположимъ, что стороны △DZM=медіанѣ △ABC. Продолжимъ медіану AE до пересѣченія съ линіей BK, параллельною OC, тогда △BEK=△OEC, такъ какъ BE=EC и углы соотвѣтственно равны; почему △BEK+△BEO=△OEC+△BEO или △OBK=△OBC. Такимъ же образомъ докажемъ, что △FBO=△ABC и △AON=△AOC. Но △△OBK, FBO и AON равны, такъ какъ стороны ихъ равны $^2/_3$ каждой изъ медіанъ △ABC, слѣдовательно △ABC=3△OBK. Разсматривая треугольники DZM и OBK, мы видимъ, что стороны ихъ пропорціанальны, такъ какъ BK=$^2/_3$CG==$^2/_3$ZD, OB=$^2/_3$BH=$^2/_3$ZM, OK=$^2/_3$AE=$^2/_3$DM, почему эти треугольники подобны, вслѣдствіе чего △DZM : △OBK=ZM^2 : OB^2==ZM^2 : ($^2/_3$ZM)^2 = 9 : 4 или △DZM : 3△OBK = 3 : 4 или △DZM : △ABC=3 : 4, что и требовалось доказать.

268. Такъ какъ окружность O_1 есть, какъ известно, геометрическое мѣсто срединъ всѣхъ хордъ, исходящихъ изъ точки A, то C есть средина хорды AB, и AC=CB; слѣд., $\frac{OA}{O_1A}=\frac{OB}{O_1C}=\frac{AB}{AC}=2$, и $\triangle ACO_1$ подобенъ $\triangle ABO$; на основании § 299. Геом. Киселева имѣемъ, что площадь сегмента AmB=[$^1/_2$R(S·—AC)]=$^1/_2$OB($\smile$AmB—AK), а площадь сегмента AnC=$^1/_2O_1C$($\smile$AnC—AK_1); такъ $\triangle ACO_1$ подобенъ $\triangle ABO$, то $\angle AO_1C$=AOB и A$\smile$mB: $\smile$AnC=OB : O_1C=2 : 1, и AK : AK_1=2 : 1; слѣд., площ. сегмента AmB: площ. сегмента AnC=$^1/_2$OB(A$\smile$mB- AK).$^1/_2O_1C$(A$\smile$nC—AK_1)=$^1/_2$.2.O_1C.(2.A$\smile$nC—2AK_1).$^1/_2O_1C$ ($\smile$AnC—AK_1)=$^1/_2$ 2.2.O_1C($\smile$AnC—AK_1) : $^1/_2O_1C$(AnC—AK_1)=4 : 1.



зад. 268.

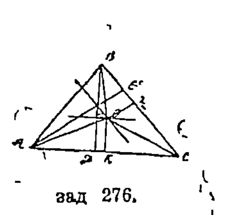

зад 275.

275. По условию ABD : DBE : EBC=m : n : p; такъ какъ площади $\triangle$-овъ, имѣющихъ одну и ту же высоту, въ данномъ случаѣ h, относятся, какъ основания, то ABD : DBE : EBC=AD : DE . EC и такимъ образомъ мы имѣемъ AD : DE : EC=m : n : p, т. е. для нахождения искомыхъ линій BD, BE, надо раздѣлить основание $\triangle$-ка ABC, т. е. линию AC въ отношении m : n : p.

276. Такъ какъ $\triangle AOC \infty \triangle BOC \infty \triangle BOA$, то $\triangle ABC \infty 3\triangle AOC$; $\triangle$-ки ABC и AOC имѣютъ общее основание AC, а потому BD : OK=3 : 1, и OK=$\frac{BD}{3}$; точно также, находимъ, что $\frac{AE}{OZ}$=3:1, и OZ=$\frac{AE}{3}$; слѣдовательно, искомая точка O находится на пресѣчении двухъ параллельныхъ линій, проходящихъ въ разстоянии OK=$\frac{BD}{3}$ и OZ=$\frac{AE}{3}$ отъ сторонъ AC и BC.

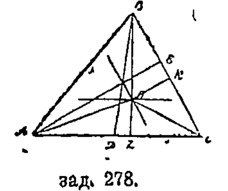
277. Эти 2 №№ 276, 277 по ошибкѣ перемѣщены. $\triangle$DBE (точка D дана, а E надо найти)=$^1/_2\triangle$ABC; слѣд., такъ $\triangle$-ки ABC и DBE имѣютъ общій уголъ B, то $\frac{\triangle ABC}{\triangle DBE}=\frac{AB.BC}{BD.BE}=\frac{2}{1}$; отсюда

имѣемъ AB . BC=2BD . BE, и BE : BC=AB : 2BD, т. е. искомая BE есть четвертая пропорціональная къ линіямъ BC, AB, 2BD и ее легко построить.



зад 276. зад 277.

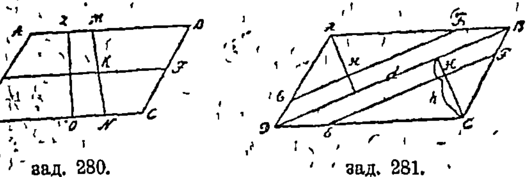
278. $\triangle AOC : \triangle BOC : \triangle BOA=2 : 3 : 4$; на основаніи производныхъ пропорцій пишемъ $(\triangle AOC+\triangle BOC+\triangle BOA) : \triangle AOC = (2+3+4) : 2$, или $\triangle ABC : \triangle AOC=9 : 2$; т. к. $\triangle$-ки ABC и AOC имѣютъ общую сторону AC, то имѣетъ право писать: $BD : OZ=9 : 2$, и $OZ={}^2/_9 BD$; точно такъ же, изъ разсмотрѣнія $\triangle$-овъ ABC и BOC, находимъ $OK={}^3/_9 AE={}^1/_3 AE$; слѣдов., искомая точка O находится на пересѣченіи двухъ параллельныхъ линій, проведенныхъ въ разстояніи $OZ={}^2/_9 BD$ и $OK={}^1/_3 AE$ отъ сторонъ AC и BC.



зад. 278. зад. 279.

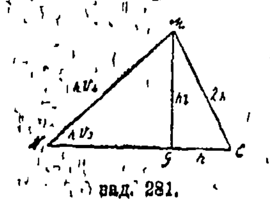
279. Раздѣлимъ сперва параллелограмъ діагональю, проходящею черезъ данную вершину, на два равныхъ треугольника и каждый изъ послѣднихъ раздѣлимъ на три равновеликія части. Для этого достаточно раздѣлить ихъ основанія на три равныя части и точки дѣленія соединить съ вершиной D. Всѣ шесть получившихся такимъ образомъ $\triangle$-овъ будутъ равновелики; въ самомъ дѣлѣ, каждый изъ $\triangle$-овъ, составляющихъ $\triangle ABD$, равенъ ${}^1/_3$ послѣдняго, такъ какъ, обладая одинаковой съ нимъ высотой, имѣетъ основаніе $={}^1/_3 AB$; точно также каждый изъ $\triangle$-овъ, составляющихъ $\triangle DBC$ равенъ ${}^1/_3$ послѣдняго; но такъ какъ $\triangle$-ки DBC и DAB равны, то и всѣ 6 малыхъ $\triangle$-овъ равновелики. Поэтому, соединяя ихъ попарно, находимъ искомыя три равновеликія части параллелограма.

280. Проведемъ среднюю линію EF; пусть искомая линія MN дѣлитъ параллелограммъ ABCD на части: AMND, MBCN, относящіяся, какъ m : n; имѣемъ: AMND : MBCN=m : n=$\frac{(AM+DN)}{2}$ ZO : $\frac{(MB+NC)}{2}$ ZO=EK : KF=m : n; отсюда заключаемъ, что для нахожденія искомой точки K, надо среднюю линію EF дѣлить въ отношеніи m : n и провести чрезъ нее MN.

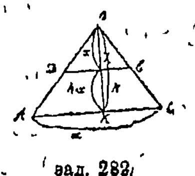


зад. 280. зад. 281.

281. Пусть дѣлящія линіи суть EF и E_1F_1. въ такомъ случаѣ $\triangle CEF=\frac{1}{3}$ □ABCD или $\triangle CFF={}^2/_3\triangle CDB$, т. к. діагональ дѣлитъ параллелограмъ на два равныхъ △-ка. Въ такомъ случаѣ $\frac{EF \cdot CH}{2}=$ $={}^2/_3 \cdot \frac{d \cdot h}{2}$ или $EF \cdot CH={}^2/_3 d \cdot h$; кромѣ того, CH : h=EF : d. Изъ этихъ двухъ соотношеній находимъ $CH=h\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}h\sqrt{6}$. CH легко найти графически, построивъ сперва прямоугольный GCM; у котораго катетъ GC=h, а гипотенуза CM=2h тогда другой катетъ $GM=h\sqrt{3}$; построивъ затѣмъ прямоугольный △GMN, оба катета котораго равны $h\sqrt{3}$, видимъ, что гипотенуза $MN=h\sqrt{6}$. Итакъ отложивъ по перпендикулярамъ, опущеннымъ изъ вершинъ A и C на діагональ DB, отрѣзки $AH'=CH=\frac{1}{3}h\sqrt{6}$, получимъ точки H' H, чрезъ которыя проходятъ искомыя прямыя.



зад. 281.

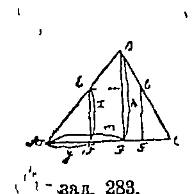


зад. 282.

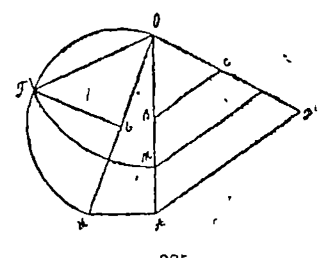
282. Пусть $\triangle ABC : \triangle DBE = \triangle DBC : \square ADEC$; въ такомъ случаѣ имѣемъ: $\frac{a.h}{2} : \frac{BE.x}{2} = \frac{DE.x}{2} : \frac{(DE+a)(h-x)}{2}$; откуда, $a.h(DE+a)(h-x) = DE^2.x^2$; кромѣ того, $a : DE = h : x$, и $DE = \frac{a.x}{h}$; исключивъ DE, получимъ $a.h\left(\frac{a.x}{h}+a\right)(h-x) = \frac{a^2x^2}{h^2}.x^2$, или $h^2 - x^2 = \frac{x^4}{h^2}$, что проводитъ къ рѣшенію биквадратнаго уравненія и дастъ $x = h\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$; если мы это напишемъ: $x = \sqrt{h.\left(h\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}$, то увидимъ, что $BZ = x$ есть средняя пропорціональная между $BK = h$ и $h\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ = сторонѣ десятиугольника въ кругѣ, радіусъ котораго h.

283. Пусть EF и E'F' искомыя линіи; въ такомъ случаѣ, $\triangle AEF = \frac{\triangle ABC}{3}$ или $\frac{xy}{2} = \frac{a.h}{3.2}$, или $xy = \frac{a.h}{3}$; кромѣ того, имѣемъ: $h : x = AD : y$, или: $h : x = m : y$; исключивъ x получимъ: $y.\frac{hy}{m} = \frac{a.h}{3}$ или $y^2 = \frac{a}{3}.m$; y, т. е. отрѣзокъ AF легко найти, какъ среднюю пропорціональную къ $\frac{a}{3}$ и m, т. е. къ $\frac{AC}{3}$ и AD; точно также можно найти отрѣзокъ F_1C.

284. $\frac{\pi R^2}{2} = \pi r^2$ или $\frac{R^2}{2} = r^2$, откуда $r = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$, т. е. радіусъ r равенъ половинѣ стороны квадрата, вписаннаго въ кругѣ радіуса R.



зад. 283.



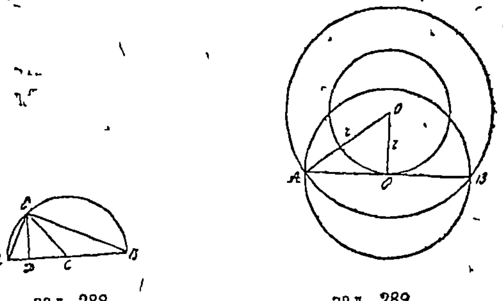
зад. 285.

285. Предположимъ, что прямая MN дѣлитъ трапецію ABCD пополамъ, т. е. что площадь MBCN: площ. ABCD=1 : 2. Продолжимъ непараллельныя стороны до взаимнаго пересѣченія въ точкѣ O, возьмемъ за неизвѣстную величину разстояніе конца M искомой линіи MN до вершины треугольника O и опредѣлимъ MO. Такъ какъ △△-ки OBC, OMN и OAD подобны, то пл. $\frac{OAD}{пл. OBC}=\frac{OA^2}{OB^2}$ и $\frac{пл. OMN}{пл. OBC}=\frac{OM^2}{OB^2}$. Изъ этихъ пропорцій имѣемъ $\frac{пл. OAD-пл. OBC}{пл. OBC}$ $=\frac{OA^2-OB^2}{OB^2}$ или $\frac{пл. ABCD}{пл. OBC}=\frac{OM^2-OB^2}{OB^2}$. Раздѣлимъ одну пропорцію на другую, получимъ $\frac{пл. ABCD}{пл. MBCN}=\frac{OA^2-OB^2}{OM^2-OB^2}$ или $\frac{OA^2-OB^2}{OM^2-OB^2}$ $=2$, откуда $OM=\sqrt{{}^1/_2(OA^2+OB^2)}=\sqrt{{}^1/_2 m^2}$, гдѣ $m^2=OA^2+OB^2$. Чтобы построить OM, возстановляемъ $\perp AH=OB$; получимъ $OH=m$, затѣмъ изъ точки E средины OH возстановляемъ $\perp EF$ до пересѣченія ея съ окружностью, которой $2r=OH$, и получаемъ $OF=OM$. Изъ точки O радіусомъ OF опишемъ дугу до пересѣченія ея съ AO въ точкѣ M, затѣмъ, правая $MN \parallel AD$; получимъ искомую линію.

287. Положимъ, что AMNC данный квадратъ, котораго площадь для краткости означимъ чрезъ k^2. Проведя AN, и взявъ B, такъ чтобы $AB=BN$, найдемъ, что $2AB^2=AC^2=k^2$, откуда $AB^2=$ $=\frac{k^2}{2}$. Далѣе, принявъ B' за средину AB и проведя $BD \perp AC$, замѣтимъ, что $2B'A^2=DA^2=\frac{k^2}{2^2}=\frac{k^2}{4}$, отсюда $B'A^2=\frac{k^2}{8}$. Взявъ на продолженіи BD—часть $DF=DB'=B'A$, получимъ, что $FA^2=$ $=DF^2+DA^2=\frac{k}{8}+\frac{k^2}{4}={}^3/_8 k^2$.

288. Пусть будетъ S данная сумма и q^2 данный квадратъ. Надъ $AB=s$ описываемъ полуокружность и возставляемъ перпендикуляръ $ED=q$, тогда AD и DB будутъ сторонами искомаго прямоугольника, потому что $AD \cdot BD=ED^2=q^2$. Пусть будетъ d—данная разность, q^2—данный квадратъ. Проведя прямую AB и возставивъ къ ней $\perp DE=q$, беремъ $DC=\frac{d}{2}$ и описываемъ изъ центра C радіусомъ CE полуокружность, тогда AD и DB будутъ стороны

искомаго прямоугольника. Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ $AD \cdot BD = DE^2 = q^2$ и кромѣ того $DB - AD = AC + DC - AD = 2DC = d$.



зад. 288 зад. 289.

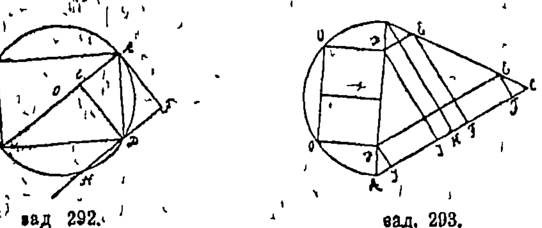
289. Обозначимъ радіусъ искомаго круга чрезъ x, тогда площадь его πx^2 должна быть $= \pi r^2 - \pi r_1^2$, т. е разности между площадью большого круга радіуса r и меньшаго радіуса r^1; сокращая равенство $\pi x^2 = \pi r^2 - \pi r_1^2$ на π, получимъ, что $x^2 = r^2 - r_1^2$, откуда $x = \sqrt{r^2 - r_1^2}$. Зная x, мы можемъ построить искомый кругъ. Но, проведя какую нибудь касательную къ меньшему концентрическому кругу, мы видимъ, что $AO'^2 = AO^2 - OO'^2$, $AO_1^2 = r^2 - r_1^2$, откуда $AO' = \sqrt{r^2 - r_1^2}$, но и $x = \sqrt{r^2 - r_1^2}$, слѣдовательно, AO' и есть радіусъ искомаго круга Дѣйствительно, $AO_1^2 = r^2 - r_1^2$, умножая на π, получимъ $\pi AO_1^2 = \pi r^2 - \pi r_1^2$, и такъ, чтобы рѣшить эту задачу стоитъ только провести касательную къ меньшему концентрическому кругу до пересѣченія ея съ большимъ кругомъ въ A и B, тогда AB будетъ діаметръ искомаго круга, ибо $AO' = \frac{AB}{2}$.

291. Данъ $\triangle$, котораго основаніе b и высота h; требуется превратить его въ равновеликій равносторонній. Предположимъ, что основаніе искомаго $\triangle$ будетъ x, а высота y, то по условію $\frac{xy}{2} = \frac{bh}{2}$ или $xy = bh$, и $y = \frac{1}{2} x\sqrt{3}$ или $x = \frac{2y}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3} y\sqrt{3}$, слѣдовательно, $xy = \frac{2}{3} y^2 \sqrt{3}$, а такъ какъ $xy = bh$, то $\frac{2y^2}{\sqrt{3}} = bh$ или $h : y = y : \frac{b}{2}\sqrt{3}$ (гдѣ $\sqrt{3}$ есть высота равносторонняго $\triangle$-ка съ основаніемъ b). Итакъ, высота искомаго $\triangle$ = средней геометрической

между высотою данного Δ и высотою равносторонняго Δ, коего основание b. Основание x искомаго Δ находимъ изъ выражения $xy=bh$ или $x:b=h:y$, т. е. x есть 4-я пропорциональная обѣихъ высотъ и основания даннаго Δ-ка.

292. Положимъ, что задача рѣшена и что въ данный кругъ вписанъ прямоугольникъ ABCD, площадь котораго m^2. Для рѣшения задачи мы должны найти сторону AD или сторону DC или высоту DE Пусть $DE=x$, тогда пл. $ABCD=2$пл. $ACD=2\cdot{}^1/_2AC\cdot DE=d\ x$. Но пл. $ABCD=m^2$, почему $d\cdot x=m^2$, откуда $x=\frac{m^2}{d}$

Итакъ, x найдемъ, какъ 4-ю пропорциональную. Чтобы построить искомый прямоугольникъ, проведемъ въ данномъ кругѣ диаметръ AC, возставимъ $\perp AF$ и отложимъ на немъ x. Затѣмъ проведемъ $FH \parallel AC$, получимъ точку. D. Соединивъ D съ A и C и проведя $AB \parallel DC$ и сторону BC находимъ прямоугольникъ.



зад 292. зад. 293.

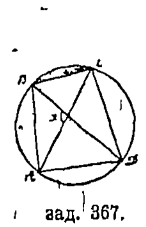
293. Пусть JDEF будетъ прямоугольникъ, равновеликий данному квадрату m^2, изъ подобныхъ $\Delta\Delta ADJ$ и ABH выводимъ, что $\frac{DJ}{BH}=\frac{AD}{AB}$ изъ подобныхъ $\Delta\Delta DBE$ и ABC имѣемъ также $\frac{DE}{AC}=\frac{BD}{AB}$. Помножая почленно оба равенства находимъ $\frac{DJ\cdot DE}{BH\cdot AC}=$ $=\frac{AD\cdot BD}{AB^2}$ или $\frac{m^2}{BH\cdot AC}=\frac{AD\ BD}{AB^2}$, или же $AD\cdot BD=\frac{m^2AB^2}{BH.AC}$.

Принимая $AD\cdot BD=x^2$ и $BH\ AC=l^2$, находимъ $x^2=\frac{m^2\cdot AB^2}{l^2}$, откуда $x=\frac{m\cdot AB}{l}$. Неизвѣстное x опредѣлить легко, ибо это четвертая пропорциональная къ прямымъ l, m и AB. Описываютъ на AB, какъ на диаметрѣ, полуокружность AOB, затѣмъ на разстояние x отъ AB проводятъ къ этой линии параллельную, которая опредѣ-

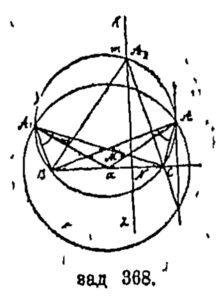
лить точку O пересѣченіемъ своимъ съ полуокружностью OAB. Изъ этой точки O опускають на линію $AB \perp OD$; наконецъ чрезъ точку D проводять линію DE, параллельную AC, и перпендикулярн. EF.

Примѣчаніе. Обыкновенно бывають два рѣшенія: JDEF и J'D'E'F', ибо $x^2 = OD^2 = O'D'^2 = AD \cdot BD = AD' \cdot BD'$, но если $x = \frac{AB}{2}$, то получается только одно рѣшеніе; наконецъ, задача становится невозможною при $x > \frac{AB}{2}$.

367. Сначала строимъ $\triangle ABC$ по тремъ сторонамъ: AB, BC, AC; описываемъ около $\triangle$-ка ABC окружность, затѣмъ изъ точки B проводимъ BD подъ даннымъ угломъ α къ AC, находимъ, так. образ. точку D и получаемъ искомый $\square ABCD$.



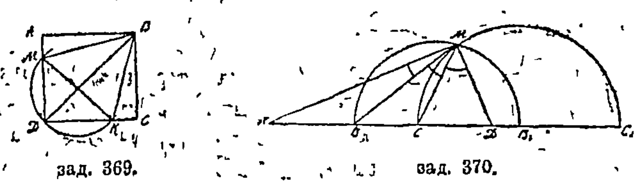
зад. 367.



зад 368.

368. Строимъ на данной сторонѣ BC сегментъ BmC, вмѣщающій данный $\angle A$; затѣмъ, т. к. $AB^2 + AC^2 = K^2$, то находимъ: $AM^2 = K^2 - \frac{a^2}{4}$ (см. геом. Киселева § 212), откуда $AM = \sqrt{K^2 - \frac{a^2}{4}}$, алгебраическимъ методомъ находимъ AM и описываемъ окружность изъ точки M радіусомъ AM; въ пересѣченіи двѣ точки A и A_1; два рѣшенія; точно также поступаемъ въ случаѣ, если дано $A_2B^2 - A_2C^2 = K^2$; или же преобразуя: $A_2B^2 = A_2N^2 + BN^2$, $A_2C^2 = A_2N^2 + CN^2$, откуда $A_2B^2 - A_2C^2 = A_2N^2 + BN^2 - A_2N^2 - CN^2 = (BN + CN)(BN - CN) = K^2$ отсюда получаемъ: $BN - CN = \frac{K^2}{a}$ и $BN + CN = a$; найдя отсюда BN и CN, построимъ въ точкѣ N $KZ \perp BC$ (KZ геометрич. мѣсто точекъ, разность квадратовъ разстояній которыхъ отъ B и C равно K^2), находимъ A_2 и $\triangle A_2BC$ найденъ.

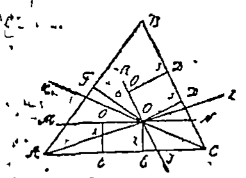
369. Пусть данъ равностор. $\triangle$MBK; опишемъ квадратъ ABCD; т. к. $\triangle$ABM$=\triangle$BCK (гипот. BM$=$BK, и AB$=$BC), то AM$=$CK и AD$-$AM$=$DC$-$K, откуда MD$=$DK; т. к. $\angle$D$=d$, то точку D легко найти; опишемъ на MK, какъ на діаметрѣ, полуокружность и проведя BD$\perp$MK, найдемъ въ пересѣченіи D; теперь, чрезъ D, и M, или K проведемъ линіи, и изъ B опускаемъ на нихъ перпендикуляры BA, BC, находимъ искомый квадратъ.



зад. 369. зад. 370.

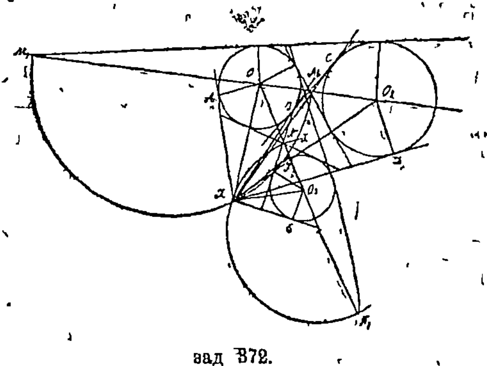
370. Пусть M искомая точка; въ такомъ случаѣ, на основаніи § 199 геом. Киселева, изъ $\triangle$AMC имѣемъ: MA : MC$=$AB : BC и на основаніи § 200 (тамъ же) имѣемъ, что M лежитъ на окружности, описанной на BB_1, какъ на діаметрѣ, точно также, изъ $\triangle$BMD имѣемъ: MB : MD$=$BC : CD и точка M на основаніи § 200 лежитъ на окружности, построенной на CC_1, какъ на діаметрѣ: точка пересѣченія есть искомая M.

371. Выбираемъ произвольную единицу измѣренія, и строимъ на сторонахъ CA и CB перпендикуляры O_1E_1 и O_1D_1, соотвѣтственно равные 2 и 3 произвольно выбраннымъ единицамъ, проводимъ линіи MN и RS соотвѣтственно параллельныя сторонамъ AC и CB въ разстояніяхъ 2 и 3; чрезъ ихъ пересѣченіе O проводимъ CK; точно также находимъ AZ, разстоянія которой отъ сторонъ AC и AB относятся, какъ 2 : 6; въ пересѣченіи CK и AZ находимъ искомую точку O.



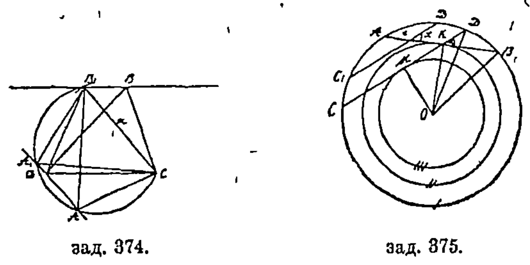
373. Пусть X будетъ искомая точка; въ такомъ случаѣ $\angle$AXC$=\angle$CXD$=\angle$FXE; $\angle AXO_1=\angle DXO_2$ и $\triangle AXO_1$ подобенъ $\triangle XO_2D$, откуда слѣдуетъ, что $\frac{XO_2}{XO_1}=\frac{O_2D}{O_1A}=\frac{R_2}{R_1}$; на основаніи § 200

геом. Киселева, точка X должна на окружности, построенной на MM_1, какъ на діаметрѣ; точно также найдемъ, что точка X должна лежать на окружности, построенной на NN_1, какъ на діаметрѣ; искомая точка находится на пресѣченіи этихъ двухъ геометрическихъ мѣстъ; два рѣшенія X и X_1.



зад 372.

374. Пусть данъ $\triangle DBC$; сначала преобразуемъ его въ $\triangle DB^1C$ съ основаніемъ $B^1C=a$; для этого, чрезъ B проводимъ линію $\parallel DC$, и изъ точки C радіусомъ $B^1C=a$ дѣлаемъ засѣчку и соединяемъ B_1 съ D; затѣмъ на B_1C строимъ сегментъ, вмѣщающій $\angle A$ и чрезъ D проводимъ линію параллельную $B'C$; получаемъ двѣ точки A и A_1; два рѣшенія.



зад. 374. зад. 375.

375. Проводимъ сначала двѣ концентрическія окружности радіусами OM и OK, опредѣляемыми изъ $\triangle$-овъ OMD и OKB; черезъ данную внутри круга точку e проводимъ AB касательную ко II-му кругу; затѣмъ проводимъ въ произвольномъ мѣстѣ $C'D'$ подъ угломъ α къ AB, и параллельно $C'D'$ проводимъ CD, касательную къ III-му кругу; AB и CD искомыя хорды.

1-е Примѣчаніе. Пусть ABCD будетъ какая нибудь трапеція, въ которой прямая EE' соединяетъ средины непараллельныхъ сторонъ, а GD' есть отрѣзокъ, захватываемый на линіи EE' діагоналями трапеціи. Какъ извѣстно, имѣемъ: $EE'=\frac{1}{2}(AB+CD)$, или $EG+GD'+D'E'=\frac{1}{2}(AB+CD)$. Но $EG=D'E'=\frac{1}{2}CD$, слѣдовательно, $EG+D'E'=CD$; и потому, подставивъ CD вмѣсто $EG+D'E'$ и потомъ перенося CD во вторую часть равенства, находимъ: $GD'=\frac{1}{2}(AB-CD)$, т. е. отрѣзокъ, захватываемый діагоналями трапеціи на прямой, соединяющей средины ея непараллельныхъ, равенъ полуразности ея основаній.

2-е Примѣчаніе. Если возставить перпендикуляръ къ срединѣ линіи DC' и продолжить его до A', до пересѣченія съ BD, потомъ провести A'C', то повидимому треугольникъ A'BC', отвѣчаетъ другому рѣшенію, ибо въ треугольникѣ D'AC', какъ въ равнобедренномъ, уголъ $BA'C'$=данному $\angle A$; $BC'=BC$ и $BA'+A'C'=BD=AB+AC$. Стало быть, треугольникъ BA'C' отвѣчаетъ вопросу. Но $\triangle BA'C'=BAC$, ибо $A=A'$, $BC'=BC$ и $A'BC=ACB$, ибо $ACB=2d-D-BC'D$, а также DBC' или $A'BC'=2d-D-BC'D$; стало быть, въ сущности есть только одно рѣшеніе.